Ao distincto amigo, Monteiro de Camargo, uma das mais primorosas culturas da nossa Universidade, lembrança affectuosa do Arnaldo

S. Paulo, 6/6/955.

Apontamentos de Geometria Preliminar

MATHEMATICA OU LOGICA

APONTAMENTOS DE GEOMETRIA PRELIMINAR

COLLIGIDOS PELO

Major de Engenheiros Manuel de Almeida Cavalcanti

ex-adjunto da antiga Escola Militar do Brasil
e do Collegio Militar

Editor: O AUTOR

1913
TYPOGRAPHIA RENASCENÇA
Campos & Oliveira

3-M, RUA DOS ANJOS, 3-N
LISBOA

DEDICATORIA

AO PROLETARIADO BRASILEIRO

CUJO NIVEL INTELLECTUAL PRECISA SER LE-
VANTADO EM NOME DOS MAIS LEGITIMOS IN-
TERESSES SOCIAES

OFFERECE

M. DE ALMEIDA CAVALCANTI

N. em 11 de Dezembro de 1865
na cidade de Palmeira dos Indios — Estado de Alagôas

PREFACIO

Omnis ratio, et naturalis investigatio fidem sequi debet, non præcedere nec infringere. *(Thomaz de Kempis.* — «De imitatione Christi», liber IV, cap. XVIII, in fine.

Havendo publicado os *Apontamentos de Arithmetica*, e redigido os de *Algebra*, julguei-me no dever de concluir o Curso de Mathematica Elementar, apresentando aos meus leitores as lições de *Geometria* que particularmente professei na extincta Escola Militar do Brasil. Na organização definitiva deste trabalho, guiei-me principalmente pela *Synthese Subjectiva* de Augusto Comte, servindo-me tambem das geometrias de Clairaut (*) e de Lacroix, e da trigonometria de Legendre. Devo, pois, começar manifestando a minha gratidão a estes Autores, sendo aqui esta homenagem tanto mais justa quanto é certo que foi o primeiro delles quem precedeu A. Comte na inadiavel regeneração do ensino mathematico, que depois dos dois outros geometras degenerára em mero *algebrismo*.

O nosso reconhecimento deve tambem estender-se ao eminente ci-

(*) A. Comte começa o preambulo geometrico por uma homenagem especial a Clairaut, a quem denomina o unico grande geometra que aperfeiçoou o ensino mathematico antes do advento do positivismo: «O principal constructor da mecanica celeste não desdenhou abrir sua nobre carreira elaborando o melhor tratado didactico sobre a geometria preliminar. Afastando pela primeira vez o empirismo classico, elle fez dignamente sobresahir a filiação logica das principaes noções estabelecidas na antiguidade.» Mais adiante refere se nestes termos a Lacroix e a Legendre: «Viu-se essa impulsão fracamente prolongada por dois geometras secundarios, um mais pratico e mais synthetico *(Lacroix)*, o outro mais theorico e mais analytico *(Legendre)*, depois dos quaes o ensino mathematico se degradou continuamente até sua renovação universal.» *(Synthèse Subjective)*.

HONRAR

dadão R. Teixeira Mendes, digno Apostolo do Positivismo no Brasil, porque no seu curso mathematico publicamente professado na séde do Apostolado, á Rua Benjamin Constant, adquiri muitas das noções importantes que ornam este trabalho. Infelizmente o meu estado de saude não permittiu que acompanhasse com assiduidade todo esse curso philosophico, e dessa circunstancia involuntaria provêm decerto as lacunas deste trabalho.

Não posso, pois, ter a pretensão de haver realizado fielmente o magistral plano do fundador do Positivismo, nem tão pouco a de reproduzir as doutas lições do seu digno Discipulo. Nutro, entretanto, a esperança de que pelo menos estes *Apontamentos* contribuirão para melhorar o ensino da *geometria preliminar*, expurgando-o dos innumeraveis theoremas e corollarios que, sem nenhum encadeamento e utilidade, foram ahi introduzidos pelo empirismo classico. (* *)

Resta-me sómente expor o plano geral deste livro. A' similhança da «Arithmetica» e da «Algebra», é elle dividido em três partes: a primeira *geral*, a segunda *fundamental* e a terceira *especial*, incluindo nesta o complemento algebrico relativo á *Trigonometria*. O seu conjunto comprehende quatorze capitulos, não se achando neste numero a *Conclusão*. Cada capitulo é dividido igualmente em três paragraphos, e cada um destes em sete secções, excepto os três ultimos que têm sómente cinco. As letras iniciaes dessas secções ligam-se em acrosticos, cujo objectivo é principalmente honrar aquelles que mais contribuiram para a fundação da Geometria Preliminar. No fim do livro encontra-se um Appendice destinado sobretudo a caracterizar as mais importantes applicações geometricas, baseadas nos systemas de *projecção, descriptiva, perspectiva,* etc.

A respeito da marcha dogmatica verá o Leitor que me abstive quanto possivel de desenhar *figuras geometricas*, bem como de reproduzir demonstrações ociosas, limitando-me a generalizar as inducções e a coordenar as deducções mais necessarias. Que necessidade pode haver de provar-se proposições evidentes, qual a que apresenta *o contorno polygonal envolvente como maior do que o envolvido tendo as mesmas extremidades?* O vezo ordinario de tudo pretender *demonstrar* com rigor nos foi legado por Euclides nos seus classicos *Elementos de Geometria*. Mas é preciso não esquecer que não vivemos na época do celebre geometra da Escola de Alexandria. Cercado de sophistas obstinados, elle sentiu a necessidade de garantir a pureza do raciocinio geometrico contra as subtilezas daquel-

(**) No meu *curso de mathematica elementar*, reduzi a 42 a totalidade das lições de *Arithmetica*, a 64 as de *Algebra*, incluindo ahi a *theoria das proporções* e suas *applicações*, e a 86 as de *Geometria*, incluindo entre estas as indispensaveis noções de *descriptiva* e *perspectiva*. Ao todo 192 lições verbaes, numero ainda assás consideravel, mas que só poderá ser diminuido quando fôr melhor dirigida entre nós a educação intellectual da primeira infancia.

les dialecticos. E' por isso que suas mais simples *proposições* se acham rodeadas de um apparelho argumentativo capaz de preserval-as de taes ataques. Os tempos são outros, e a fé *demonstravel* deve-se impor independentemente dessas satisfacções ao espirito metaphysico. As *demonstrações*, segundo a etymologia deste termo, devem visar de preferencia a filiação dos assumptos, isto é, sua ligação inductiva ou deductiva, sem se preoccuparem com a certeza, cuja verificação exigiria desenvolvimentos secundarios, que fariam logo perder de vista o objecto principal.

Só por este modo se pode systematizar o terceiro gráo da verdadeira *Logica*, fazendo concordar, quanto possivel, a filiação dogmatica com a successão historica das noções correspondentes, e «evitando por igual o rigor pedantesco e o vago relaxamento».

Relativamente ao emprego das figuras geometricas, em desenho ou relevo, é preciso ter sempre a maior parcimonia. O abuso dessas imagens exteriores só poderá concorrer para impedir a evocação das interiores, enfraquecendo assim a imaginação da mocidade. De resto, a impossibilidade de desenhar perfeitamente essas figuras, á medida que as especulações geometricas se complicam, tornaria incompleto e incoherente o seu emprego, mesmo que se o tivesse exercitado quanto aos casos mais simples. Eis os motivos que me levaram a reduzir o numero de figuras desenhadas e a collocal-as em quadros especiaes no fim desta obra. Por este modo, poderá o Leitor, nos seus estudos privados, esforçar-se por comprehender o texto, dispensando-se o mais possivel de utilizal-as.

M. DE ALMEIDA CAVALCANTI

Rio de Janeiro (Villa Olinda)—Leme
9 de Janeiro — 1908

PRIMEIRA PARTE

Apreciação Geral da Geometria

CAPITULO I

Concepção geral da Geometria mediante a apreciação do seu fim e do seu dominio

§ 1.º

Objecto definitivo da Geometria

1 — Ao encetar o estudo da Geometria, devemos começar por indicar exactamente o *seu fim e a extensão do seu dominio*. Ambas estas apreciações podem resultar do exame aprofundado do objectivo que é lembrado pelo nome, que essa sciencia conserva desde o seu surto grego. Esse nome quer dizer *medida da terra*, ou melhor, *do terreno*, e mostra que foi da necessidade da vida industrial que resultou a sua instituição. Ella, portanto, só podia ter surgido depois do advento da vida sedentaria.

Na palavra *geometria* duas noções se encerram: a noção de *medida* e a de *extensão*, pois que a phrase *medida do terreno* quer de facto dizer *medida da extensão do terreno*. Mas, como a extensão muda com a natureza do objecto, se comprehende que a restricção *do terreno* serve apenas para indicar o primitivo destino concreto da *geometria*, sem contribuir para melhor definir o fim de tal sciencia. Somos assim levados a perceber a equivalencia completa entre o sentido da palavra *geometria* e a *medida da extensão*.

2 — Tal é a definição que devemos examinar para adquirir um exacto conhecimento do objecto da *geometria*. Nesse

intuito convem apreciar successivamente as duas noções de *extensão* e de *medida*, desenvolvendo e systematizando os dados com que já nos achamos empiricamente familiarizados.

Comecemos pela noção de *extensão*. Semelhante palavra caracteriza o attributo mais geral que podemos abstrahir dos corpos, além do facto da sua *existencia*. Essa noção nos é dada pelos dous sentidos do *tacto* e da *visão*, ao passo que a noção de *existencia* é fornecida por qualquer dos nossos sentidos. E' essa noção de *existencia individual* ou *collectiva*, que foi systematizada pela concepção abstracta do *numero* e conduziu ao *calculo*, como já sabemos.

Mas é facil de reconhecer que dos dous sentidos, *tacto* e *visão*, aquelle que melhor caracteriza a *extensão* é o *tacto*, pois que a *visão* nos conduz, por si só, a noções erroneas sobre a *extensão*. Basta notar que um objecto parece maior ou menor conforme a distancia em que o vemos para não termos duvida a tal respeito.

O *tacto* torna-se, pois, o criterio para avaliar a *extensão*; mas desde que a *visão* nos permitte aprecial-a tambem, é claro que dahi resulta a necessidade de educar a *visão* pelo *tacto*. Isto é, a Humanidade foi levada a combinar os dous sentidos na apreciação da *extensão*, utilizando as suas vantagens respectivas.

Com effeito, para sentir a necessidade dessa mutua educação, basta lembrar que na maioria dos casos não podemos tocar os objectos que desejamos medir. De sorte que é preciso mesmo reduzir á visão as medidas fundamentaes. Isto posto, o *tacto* nos mostra que a noção de *extensão* é inseparavel da de *fórma* e da de *espessura* ou de *impenetrabilidade*. A *visão* nos mostra tambem essa connexidade, mas não de um modo tão exacto. Quanto á *fórma*, basta notar que a simples *visão* nos exporia a attribuir á mudança de *fórma* alterações devidas ás circunstancias em que os corpos são vistos.

Por exemplo: o corpo immerso parece á *visão* quebrado ao nivel da superficie fluida que o envolve. Quanto á *espessura*,

á *visão* não permitte aprecial-a em muitos casos em que o *tacto* a distingue, e faz acreditar em *espessuras* que não existem — as sombras — os phantasmas, etc.

Assim, em resumo, é pelo *tacto* que conhecemos a propriedade que os corpos têm de ser extensos, isto é, de poderem occupar uma parte maior ou menor da superficie do nosso corpo, e essa propriedade é inseparavel da de *fórma* e *espessura* ou *impenetrabilidade*. Este ultimo attributo é caracterizado por diversas denominações que indicam os casos concretos em que elle foi apanhado: *volume*, *grossura*, *profundidade*, etc....

Nós vimos tambem que a noção de *pluralidade* teve varias denominações, conforme a sua fonte concreta: *segundo*, *par*, *casal*, *gemeos*, etc.... para o numero dous.

Assim toda extensão é espessa, tem um certo volume, e sua espessura ou volume póde ser apreciada em sentidos differentes. Mas, as propriedades subjectivas do numero *três* conduziram bem cedo a considerar o volume de cada corpo como definido por três aspectos, caracterizados pelas palavras *comprimento*, *largura* e *profundidade* ou *altura*. Veremos como esse primeiro apanhado foi systematizado pela geometria.

Deste modo, a primeira maneira de indicar a grandeza de um corpo consiste em tomar nota de suas três dimensões. Comquanto todo corpo ou todo volume tenha três dimensões, pois que póde ser apreciado como *comprido*, como *largo* e como *alto* ou *profundo*, nem sempre precisamos conhecel-o sob esses três aspectos. Ha casos em que apenas nos interessa aprecial-o como *comprido* e *largo*, abstrahindo da *profundidade*. Exemplo: quando se quer atapetar uma sala, ladrilhar um pateo, demarcar um terreno, etc.... Nestes casos a outra dimensão da sala, do pateo, do terreno, etc. póde ser considerada como imperceptivel. Os casos em que a extensão só póde ser apreciada pela *visão* facilitam a consideração de taes dimensões. Isto é, somos levados então a abstrahir da *pro-*

fundidade ou *altura*. Foi assim, que a Humanidade foi conduzida á noção de *superficie*.

Em outros casos não precisamos senão considerar uma unica dimensão, abstrahindo das outras duas, e chega-se assim á noção de *linha*.

Emfim, casos ha em que se precisa unicamente considerar a posição geral do corpo, e então basta saber a posição de uma parte diminutissima delle. Exemplo: saber onde se acha um homem, uma arvore, etc.... Chega-se assim á noção de *ponto*.

Em resumo, ha três especies de extensão: o *volume*, no qual se consideram três dimensões; a *superficie*, em que se consideram duas dimensões, tal como uma lamina cuja espessura é inapreciavel; e finalmente a *linha*, em que se considera uma unica dimensão, isto é, se imagina um fio cujo adelgaçamento ou espessura é imperceptivel. Quanto ao *ponto*, deve-se consideral-o como a extensão cujas dimensões são todas imperceptiveis; elle póde pois ser encarado como um *volume*, como uma *superficie* ou como uma *linha* infinitamente pequena; o seu officio, em geometria, é assignalar a *posição* independentemente da grandeza, isto é, permittir imaginar a posição abstrahindo de todos os outros attributos dos corpos.

3 — Havendo apreciado a noção de *extensão*, resta-nos sómente, para concluir o exame da definição que acima demos da geometria, fixar a noção de *medida*, isto é, considerar o alcance que ella tem nesta sciencia.

Medir — como já o dissemos — é reduzir o conhecimento de uma grandeza ao de outra, indicando quantas partes desta se contêm naquella. E' a isto que se chama *relação* ou *razão* entre as duas. Duas grandezas podem tambem ser comparadas, determinando-se a differença entre ellas; mas, neste caso, o conhecimento de uma exige o conhecimento de duas outras, a saber: a segunda e a differença entre ellas. Nestas condições a determinação não tem um caracter puramente abstracto, ao passo que a *medida* propriamente dita institue uma relação

puramente abstracta entre as duas grandezas dadas, visto como essa relação é um *numero*.

A grandeza que serve de termo de comparação, isto é, de *unidade*, chama-se *modulo*, palavra latina que signifia *pequena medida*. Isto posto, para medir directamente uma extensão por meio de outra é necessario superpol-as. E', com effeito, assim que se effectuam empiricamente as medidas. Mas o fito da geometria não é explicar como se realiza tal superposição, conforme se vae vêr, examinando o modo pelo qual esta sciencia se propõe a medir a *extensão*.

Comecemos pela medida das linhas, que é evidentemente o caso mais simples. Convem distinguir duas hypotheses, conforme se trata da linha *recta* ou da linha *curva*. A superposição só é realmente satisfeita quando se trata de linhas rectas.

Duas curvas podem, por vezes, ser concebidas como susceptiveis de superposição; mas esse modo de comparar não póde adquirir a precisão conveniente. Por isso a *geometria* propõe-se, neste caso, reduzir a medida de qualquer curva á medida de certas linhas rectas, e por conseguinte, sob um ponto de vista mais geral, reduzir a simples questões de linhas rectas todas as questões relativas á grandeza de curvas quaesquer.

Para conceber a possibilidade de tal transformação, é preciso observar que em qualquer curva existem constantemente certas rectas, cujo comprimento deve bastar para determinar o da curva. Assim, por exemplo, em um *circulo*, é evidente que do comprimento do *raio* se deve poder concluir o da circunferencia; do mesmo modo, o cumprimento de uma *ellipse* depende do de seus *eixos*; o cumprimento da cycloide (1 a), do diametro do circulo gerador, etc. E si em lugar de considerar a totalidade de cada curva, pede-se mais geralmente o comprimento de um arco qualquer, bastará ligar aos diversos parametros rectilineos (linhas rectas que definem o conjunto

(1 a) A cycloide é a curva produzida por qualquer ponto de um circulo que róla, sem escorregamento, sobre uma linha recta contida no seu plano.

da curva, por exemplo, o raio para o circulo, os eixos para a ellipse etc....) que determinam o conjunto da curva, á corda do arco proposto.

«Descobrir a relação que existe entre o comprimento de uma linha curva e o de taes linhas rectas, tal é o problema geral que se tem essencialmente em vista na parte da geometria relativa ao estudo das linhas. E' por isso que a medida geometrica das curvas é caracterizada pela palavra *rectificação.*»

Mas, mesmo quando se trata de linhas rectas, a medida não se opera, em geral, pela superposição directa. E' isto que convem mostrar para que se perceba como póde haver em geometria uma secção especial relativa á linha recta, o que parece, á primeira vista, incompativel com o principio que a medida dessa classe de linhas deve sempre ser considerada como immediata. Tal medida é com effeito mediata quanto ás linhas curvas e em todos os outros casos que a geometria considera. Mas, a respeito da linha recta, é evidente que sua medida não deve ser encarada como directa senão quando se póde collocar successivameute sobre ella a unidade linear.

Ora isso é o que apresenta, na maior parte das vezes, difficuldades insuperaveis, conforme se reconhece reflectindo no conjunto das condições indispensaveis para que uma linha recta seja susceptivel de medida directa. A primeira e a mais grosseira destas condições, a de poder-se percorrer a linha de um extremo a outro para aplicar-lhe successivamente a unidade em toda a sua extensão, exclue evidentemente a medida da maioria das distancias entre os differentes corpos celestes, ou da Terra a qualquer delles, e ainda mesmo a maioria das distancias terrestres que são tão frequentemente inaccessiveis.

Quando essa primeira condição se acha preenchida, é preciso ainda que o comprimento não seja nem demasiado grande nem demasiadamente pequeno, o que tornaria a sua medida igualmente impossivel; é necessario, além disso, que esteja convenientemente situado, etc.... A mais ligeira circunstan-

cia, que abstractamente parecia não dever introduzir nenhuma difficuldade nova, bastará muitas vezes, na realidade, para interdizer-nos toda medida directa. Assim, por exemplo, para uma linha que poderiamos medir exactamente e com a maior facilidade si fosse horizontal, bastaria ser concebida levantada verticalmente para que a medida se tornasse impossivel.

Em uma palavra, a medida directa de uma linha recta apresenta tal complicação de difficuldades, sobretudo quando se quer introduzir alguma exactidão, que quasi nunca encontramos linhas susceptiveis de serem medidas directamente e de um modo preciso. Pelo menos é o que se verifica na medida da maioria das grandezas, salvo as linhas puramente artificiaes creadas expressamente por nós para comportar uma determinação directa, e ás quaes conseguimos ligar as demais. Resulta dahi a necessidade de fazer depender, em geral, a medida das linhas rectas de outras medidas analogas, susceptiveis de serem immediatamente effectuadas.

Ha, pois necessidade de um primeiro estudo geometrico distincto, exclusivamente consagrado ás linhas rectas, com o fim de *medil-as umas pelas outras, segundo as relações peculiares ás figuras quaesquer resultantes* de *seus aggregados.* Esta parte preliminar da *geometria*, que parece por assim dizer imperceptivel quando se considera o conjunto de tal sciencia, é todavia susceptivel de grande desenvolvimento, quando se quer tratal-a em toda a sua extensão. Ella é evidentemente tanto mais importante quanto todas as medidas geometricas devendo reduzir-se o mais possivel á das linhas rectas, a impossibilidade de determinar essas ultimas bastaria para tornar incompleta a solução de cada questão.

4 — A respeito das *superficies*, que devemos agora considerar, vê-se que a medida immediata dellas é ainda mais inaccessivel, em geral, do que a das linhas. Todavia, existe sempre um certo numero de linhas, mais ou menos faceis de assignalar, cujo comprimento basta para definir exactamente a grandeza da superficie. A *geometria*, considerando essas linhas

como as unicas susceptiveis de serem medidas, propõe-se a deduzir de sua simples determinação a relação da superficie para com a unidade superficial.

Por exemplo: a grandeza de uma superficie cylindrica e a de uma superficie conica dependem da circumferencia da base e da aresta; a grandeza da superficie de uma esphera depende da circumferencia geratriz, etc... Descobertas as leis que prendem a grandeza da superficie á de taes linhas, e essas já se achando referidas, por meio de outras leis, aos seus parametros rectilineos, a superficie póde ser emfim reduzida ao *quadrado* equivalente. E' essa concatenação de medidas que a Humanidade caracterizou com o nome de *quadratura*.

5 — Ligada á medida das superficies, a dos volumes não póde tambem ser effectuada immediatamente. E' com effeito intuitiva a impossibilidade geral de medil-os pela comparação immediata com o volume *modular*. Sabemos que este é o *cubo* tendo para aresta a unidade de comprimento, assim como a unidade de superficie é o *quadrado* que tem para lado aquelle modulo linear. Entretanto é facil de perceber-se que a grandeza de todo volume depende da area de certas superficies e do comprimento de certas linhas.

A *geometria* propõe-se, neste caso, a descobrir as leis que existem entre a grandeza dos volumes e a das superficies e linhas quaesquer correspondentes. Ora, como a grandeza dessas linhas se reduz á de certas rectas, a medida geometrica dos volumes fica, em ultima analyse, reduzida á de linhas rectas. E' assim que a *geometria* institue o *cubo*, que equivale a cada volume ou porção de volume dado. Semelhante serie de operações é que foi qualificada com a denominação de *cubatura*.

As considerações precedentes deixam ver, em resumo, que a *geometria* se propõe a descobrir as leis que prendem entre si as diversas especies de extensão, de modo *a reduzir a medida dos volumes, das superficies e das linhas quaesquer á*

simplès medida de certas rectas instituidas segundo o conjunto de nossas necessidades moraes, intellectuaes e praticas. Tudo quanto precede não significa, porém, que, instituindo a *geometria* como *tendo por objecto a medida indirecta da extensão*, a Humanidade tivesse tornado dispensavel toda a comparação directa dos volumes e das superficies. Pelo contrario, a imperfeição inherente á fraqueza inductiva e deductiva de nossa intelligencia e a complexidade do mundo obrigam muitas vezes a taes comparações e mesmo á comparação entre os pesos. E' assim que se determina muitas vezes o volume e mesmo a superficie de um corpo comparando-o directamente com outro.

Assim tambem em certas occasiões, quando se póde substituir ao volume proposto um volume liquido equivalente, se estabelece immediatamente a comparação dos dous volumes, aproveitando a propriedade physica que apresentam as massas liquidas de poderem tomar todas as fórmas. Por exemplo: póde-se determinar o volume de um corpo apreciando a quantidade de liquido que elle desloca. «Porém, alem de sua irracionalidade, esse supplemento pratico da insufficiencia theorica repousa sobre o conhecimento das leis geometricas relativas a formas mais simples do que aquellas que necessitam delle».

Para tornar mais sensivel a differença entre essas determinações e as verdadeiras medidas geometricas basta citar um unico exemplo muito notavel: a maneira pela qual Galilêu avaliou a relação da area da cycloide ordinaria para a do circulo gerador. A geometria do seu tempo sendo ainda por demais inferior á solução racional de tal problema, Galileu imaginou procurar a *relação* por meio de uma experiencia directa.

Tendo pesado, o mais exactamente possivel, duas laminas da mesma materia e de igual espessura, das quaes uma tinha a fórma de um circulo e a outra a da cycloide gerada, elle achou que o peso desta era constantemente triplice do da pri-

meira, donde concluiu que a area da cycloide é o triplo da do circulo gerador, resultado conforme á verdadeira solução obtida mais tarde por Pascal, Roberval, Decartes e Wallis. Semelhante successo, sobre o qual se illudiu Galileu, provém evidentemente da extrema simplicidade real da relação procurada; mas concebe-se a insufficiencia necessaria de semelhantes expedientes, mesmo quando forem effectivamente praticaveis. Assim, é preciso que se reconheça, desde o começo, a impotencia da *geometria* a respeito de casos que parecem ser facilmente accessiveis. Ella nunca pôde descobrir a lei segundo a qual a area de um cylindro circular obliquo depende de sua altura ou de sua obliquidade. «Os seus reaes progressos a tal respeito só conseguiram reduzir tal problema á rectificação da ellipse, que permanecerá sempre innaccessivel.» Factos dessa ordem bem mostram que é urgente disciplinar as investigações scientificas subordinando-as ao seu destino social.

6 — Estando assim determinado o objecto da *geometria*, antes de examinar a extensão do seu dominio, convem comparal-a com os outros termos da jerarchia mathematica. Quanto ao *calculo*, sente-se logo o accrescimo de *complicação* e de *realidade* que o estudo do mundo adquire quando a Logica passa das especulações numericas ás investigações geometricas. De facto, em *arithmetica* encontram-se noções reaes, mas que apenas esboçam o estudo directo da existencia universal sob o seu aspecto mais grosseiro. As apreciações numericas confundem, como vimos, todos os seres e todos os phenomenos.

Em *algebra* deparamos com um accumulo antecipado de deducções hypotheticas que não podem comportar immediatamente realidade alguma, salvo os theoremas numericamente resultantes das transformações algebricas.

Em *geometria*, porém, começa-se a apreciar os attributos que differenciam os seres entre si, examinando a existencia universal sob o seu aspecto mais fundamental, cuja *generalidade* só é inferior á do ponto de vista arithmetico. Para bem

apanhar esse caracter de generalidade da *geometria* basta notar que si no mundo nada se movesse, os unicos phenomenos subsistentes seriam os geometricos.

Mas, ao mesmo tempo que se percebe assim o accrescimo de complicação e de realidade, reconhece-se um augmento de *difficuldade* quanto ás três condições necessarias á verdadeira racionalidade: — *clareza*, *precisão* e *consistencia*. Basta para isso comparar a noção de *numero* com a de *extensão* nos seus três modos (volume, superficie e linha) e com a de posição (ponto) para se dissipar qualquer duvida a tal respeito.

Vê-se assim surgir o contraste que toda a iniciação encyclopedica deve depois desenvolver, cada vez mais, entre a *imperfeição* e a *dignidade* simultaneamente crescentes das theorias reaes. Quanto mais reaes e mais dignas, tanto mais imperfeitas e mais complicadas são as investigações. O impulso continuo dessas convicções especiaes nos permitte melhor prevenir e corrigir as *illusões* e as *pretensões* da cultura abstracta.

Já a *geometria*, comparada com o *calculo*, permitte tambem apreciar, sem sahir do dominio logico, a *subordinação encyclopedica*, na qual *cada sciencia repousa sobre a precedente e a utiliza*. Vê-se nella, *dogmatica* como *historicamente*, o surto da *algebra* essencialmente regulado pela sua destinação geometrica, depois que a disciplina positiva afastou as puerilidades academicas.

10 — Sob o ponto de vista logico, toda a *geometria* é essencialmente apropriada a caracterizar o officio *inductivo*, *deductivo* e mesmo *constructivo* do Calculo, quando empregado convenientemente. Ella faz surgir assim a harmonia que a continuação do surto abstracto deve gradualmente desenvolver entre os estudos superiores e os estudos inferiores, igualmente indispensaveis uns aos outros como *fim* ou *base*. (Os superiores fim dos inferiores, e estes base daquelles).

Reciprocamente, ella é tambem apropriada a manifestar a necessidade universal da disciplina positiva, que sómente póde

preservar cada sciencia das usurpações da precedente, qual a da *geometria* pela *algebra*. Estendida successivamente a todos os graos encyclopedicos, essa dupla apreciação deve finalmente constituir em Moral o verdadeiro regimem theorico. Porque, depois de mostrar a necessidade de subordinar todas as sciencias á *Moral theorica*, a disciplina positiva motiva a subordinação desta á *Moral pratica*.

Por conseguinte, importa fazel-a sentir sufficientemente, desde o começo, entre os dous estudos (*calculo* e *geometria*) mais connexos que apresenta a jerarchia scientifica. E' então facil de impedir habitos insufficientes ou viciosos que dahi se estenderiam alhures, adquirindo um ascendente em breve difficil de ser superado. Em resumo, tudo quanto precede demonstra claramente a importancia e a imperfeição da *geometria*, a sua dependencia para com o *calculo*, e, por todos esses motivos, a solicitude que ella deve suscitar na educação theorica. (1 b)

(1 b) Notas tomadas no curso professado no Apostolado Positivista do Brasil pelo seu digno Vice-Director, Cidadão R. Teixeira Mendes.

§ 2.º

Dominio da Geometria, segundo sua definição

11 — Guiados pelas leis geometricas, podemos conseguir a medida indirecta da extensão, cuja comparação directa seria as mais das vezes impossivel pelos obstaculos que se oppõem á avaliação immediata dos *volumes*, das *superficies* e das *linhas*. Alem disso, são taes leis unicamente que nos permittem regular as dimensões, conforme os resultados desejados. E', por exemplo, baseando-nos nellas que poderemos determinar as dimensões a dar a uma *esphera*, a um *cone*, a um *cylindro*, para terem um certo volume, ou as dimensões a dar aos eixos de uma *ellipse*, etc... para que esta tenha um certo comprimento ou abranja uma certa area, etc... Sem o auxilio de taes leis, o empirismo instituiria apenas approximações sempre incapazes, por seu isolamento, de guiar a nossa intervenção, conquanto convenham, em falta de melhor, *aos casos por demais numerosos* que persistem inaccessiveis á Sciencia.

12 — Retomemos a definição geral que foi instituida e vejamos quaes as condições que della decorrem como indispensaveis para que a *geometria* satisfaça o seu fim. Este exame torna-se mesmo necessario afim de que se tenha uma noção completa do verdadeiro dominio que este objectivo lhe proporciona de facto.

Acabamos de mostrar que a *geometria* se propõe a descobrir as leis que permittem medir os *volumes*, as *superficies* e as *linhas* por meio de seus parametros rectilineos. Ora, para que essa descoberta seja possivel, é necessario que se

conheçam os parametros mais convenientes para manifestar as relações entre a sua grandeza e a fórma que se quer avaliar. Isto significa que quasi sempre se necessita, mesmo para as fórmas mais simples, de uma preparação relativa ás suas propriedades caracteristicas, consistindo sobretudo em descobrir seus differentes modos de geração pelo movimento de um ponto oû de uma linha.

Observe-se ainda que, si não conhecessemos para cada linha ou para cada superficie outra *propriedade caracteristica* alem daquella segundo a qual os geometras primitivamente a conceberam, seria as mais das vezes impossivel conseguir a solução das questões relativas á *medida*. Com effeito, é facil de sentir que as differentes definições de que cada fórma é susceptivel não são todas igualmente apropriadas a semelhante destino, e que apresentam mesmo a esse respeito as opposições mais completas.

13 — **E'** claro, por outro lado, que a primitiva definição geometrica de cada fórma, não tendo podido ser escolhida em virtude da condição solicitada por sua medida, não se deve esperar que geralmente seja ella a mais conveniente para esse fim; dahi resulta a necessidade de descobrir outras, isto é, de estudar tanto quanto possivel as propriedades caracteristicas da fórma proposta. Alguns exemplos bastarão para mostrar a necessidade de que se trata.

«Supponhamos que o circulo seja definido como a curva que sob o mesmo contorno encerra a maior *area*, o que é portanto uma propriedade inteiramente caracteristica. Experimentar-se-hão evidentemente difficuldades insuperaveis para deduzir de tal ponto de partida a solução das questões fundamentaes relativas á rectificação ou á quadratura dessa curva. E' claro, á *priori*, que a propriedade de ter todos os seus pontos equidistantes de um ponto fixo deve necessariamente adaptar-se muito melhor ás pesquisas dessa natureza, sem que ella seja precisamente a mais conveniente.

Assim tambem Archimédes não teria jamais podido des-

cobrir a quadratura da parabola, si não tivesse conhecido dessa curva outra propriedade senão a de ser a secção de um cone de base circular por um plano parallelo á sua geratriz». Os trabalhos puramente especulativos dos geometras que o precederam, para transformar essa primeira definição, foram evidentemente preliminares indispensaveis á solução directa de tal questão.

O mesmo dá-se, por mais forte razão, relativamente ás *superficies*. Para ter uma justa idéa a tal respeito, basta comparar, por exemplo, quanto á questão de cubatura ou de quadratura, a definição ordinaria da esphera com a não menos caracteristica, sem duvida, que consiste em considerar um corpo espherico como o que sob a mesma area contém maior volume.

«Seria escusado maior numero de exemplos para fazer comprehender em geral a necessidade de conhecer, tanto quanto possivel, todas as propriedades de cada linha ou de cada superficie afim de facilitar a pesquisa das rectificações, das quadraturas e das cubaturas, que constitue o objecto final da *geometria*.»

14 — Guiados pelas considerações precedentes, podemos mesmo dizer que a principal difficuldade das questões deste genero consiste em empregar, em cada caso, a propriedade que melhor se adapta á natureza do problema proposto. Assim, continuando a indicar a *medida da extensão* como o destino geral da *geometria*, esta primeira consideração, que toca directamente o fundo da questão, demonstra claramente a necessidade de comprehender nella o estudo, tão aprofundado quanto possivel, das diversas gerações ou definições peculiares a uma mesma fórma.

A esse preambulo necessario deve naturalmente corresponder a maior parte do estudo destinado a cada figura, pois que elle comporta um desenvolvimento *espontaneamente indefinido*, ao passo que a *medida* não suscita senão questões naturalmente limitadas. Todos os trabalhos realizados sobre o cir-

culo, desde a theocracia até á sociocracia, não esgotaram o exame de suas propriedades, conquanto a sua rectificação e a sua quadratura tenham sido bem depressa obtidas.

E' preciso, portanto, reconhecer a necessidade de systematizar tal appendice, ligando-o ao dominio essencial (medida) cuja apreciação elle alteraria absorvendo a attenção, em virtude de seu desenvolvimento natural.

15 — Ora, esta systematização resulta, em primeiro lugar, das considerações mesmas que acabam de ser apresentadas para justificar no ponto de vista theorico a necessidade do estudo das propriedades das figuras. Deve-se a principio reconhecer directamente que as rectificações, quadraturas e cubaturas excedem, tanto em difficuldade como em importancia, as pesquisas puramente relativas á geração das figuras correspondentes. Todo surto intellectual desenvolve a convicção, assim surgida em *geometria*, de que os *problemas mais uteis são tambem os mais difficeis*, ficando insoluveis sem a preparação resultante de estudos que não têm outro officio theorico. Os estudos preparatorios devem pois ser referidos a essa destinação tornando-se sua cultura ociosa desde que o fim se acha assaz attingido.

Sob a disciplina espontanea, emanada da *geometria moderna*, renunciou-se tacitamente a descobrir novas propriedades do circulo, como de outras curvas quaesquer, conquanto esse regimem facilitasse os meios de descoberta, justamente desdenhados em vista de especulações mais uteis.

16 — De outro lado, em sentido contrario a esse *motivo theorico* para limitar o estudo das propriedades das figuras, existe a necessidade de assegurar a *passagem do abstracto para o concreto.*

Instituindo a *geometria* abstracta, a Humanidade teve por fim habilitar-se para conhecer e modificar o mundo, alem do officio logico e moral inherente a toda a sciencia. Ora, a *medida* das fórmas concretas exige o seu conhecimento, isto é, a sua conveniente identificação com as fórmas abstractas es-

tudadas pela *geometria*. Por outro lado, a construcção das fórmas industriaes exige que se conheça os meios mais commodos de executal-as. Sem isso seria impossivel construir fórmas segundo uma dimensão desejada.

Para todos esses casos, a passagem do abstracto ao concreto exige que se dê um surto conveniente ao estudo das propriedades das fórmas geometricas. «Com effeito, si nos limitassemos sempre a uma só definição primitiva de uma linha ou de uma superficie, suppondo mesmo que se pudesse então medil-a (o que segundo as considerações precedentes seria as mais das vezes impossivel), esses conhecimentos permaneceriam quasi necessariamente estereis na applicação, pois que não se poderia ordinariamente reconhecer essa fórma na natureza, quando ella se apresentasse, nem realizal-a convenientemente na industria.»

Seria preciso para isso que o caracter unico segundo o qual os geometras a tivessem concebido, fosse precisamente aquelle cuja verificação as circunstancias exteriores comportassem, coincidencia puramente fortuita e sobre a qual evidentemente não se deve contar, conquanto algumas vezes possa ter lugar. Não é, por conseguinte senão multiplicando, tanto quanto possivel, as propriedades caracteristicas de cada fórma abstracta, que podemos estar certos, de antemão, de reconhecel-as no estado concreto, e de utilizar assim todos os nossos trabalhos racionaes, verificando em cada caso a definição que é susceptivel de ser constatada directamente.

Essa definição é quasi sempre unica nas circunstancias dadas, e varia pelo contrario, para uma mesma fórma em circunstancias differentes, duplo motivo de determinação. «A *geometria celeste* nos fornece a esse respeito o exemplo mais memoravel, bem apropriado para pôr em evidencia a necessidade geral de tal estudo. Sabe-se, com effeito, que a ellipse foi reconhecida por Kepler como sendo a curva que descrevem os planetas em torno do sol e os satellites em torno de seus planetas.

Ora, essa descoberta fundamental, que renovou a astronomia, não teria sido possivel si os geometras se tivessem limitado sempre a conceber a ellipse como a secção obliqua de um cone circular por um plano. Nenhuma definição de tal ordem poderia evidentemente comportar semelhante verificação. A propriedade mais usual da ellipse, que *a somma das distancias de todos os seus pontos a dois pontos fixos é constante*, é muito mais susceptivel, sem duvida, por sua natureza, de fazer reconhecer a curva neste caso, mas não é ainda directamente conveniente.

O unico caracter que póde ser então verificado immediatamente é aquelle que se tira da relação que existe na ellipse entre o comprimento das distancias focaes e a sua direcção, unica relação que admitte uma interpretação astronomica, como exprimindo a lei que liga a distancia do planeta ao sol no tempo decorrido desde a origem de sua revolução. Foi preciso, portanto, que os trabalhos puramente especulativos dos geometras gregos sobre as propriedades das secções conicas tivessem previamente apresentado a geração dellas sob uma multidão de pontos de vista differentes, para que Kepler pudesse assim fazer a passagem do abstracto ao concreto, escolhendo entre todos esses diversos caracteres aquelle que podia mais facilmente ser constatado para as orbitas planetarias.

Póde-se citar ainda um exemplo da mesma ordem, relativamente ás superficies, considerando a importante questão da forma da Terra. Si não se tivesse jamais conhecido outra propriedade da esphera a não ser o caracter primitivo, *de todos os seus pontos serem equidistantes de um ponto interior*, não se poderia ter descoberto que a superficie da Terra é espherica. Para isso foi preciso deduzir previamente dessa definição da esphera algumas propriedades susceptiveis de serem verificadas por observações effectuadas unicamente na sua superficie, como, por exemplo, a relação constante que existe para a esphera entre o comprimento do caminho percorrido ao longo de um meridiano qualquer, avançando para o polo, e

a altura angular daquelle polo sobre o horizonte em cada ponto.

O mesmo deu-se evidentemente com uma serie muito mais longa de especulações preliminares, para constatar mais tarde que a Terra não é rigorosamente espherica, mas que a sua forma é a de um ellipsoide de revolução. A' vista de taes exemplos seria escusado insistir mais para mostrar que sem um conhecimento bastante extenso das diversas propriedades de cada forma, a relação do abstracto para o concreto, em *geometria*, seria puramente accidental, e por conseguinte a sciencia falharia a um de seus fundamentos mais essenciaes.

20 — Eis, pois, os dous motivos geraes que demonstram plenamente a necessidade de introduzir-se em *geometria* uma multidão de pesquisas que não têm por objecto directo a *medida da extensão*, continuando-se entretanto a conceber tal medida como a destinação final de toda a sciencia geometrica. Assim, deve-se considerar todas as pesquisas geometricas que não parecem se referir á *medida da extensão*, como destinadas a preparar ou completar tal *medida*, já theoricamente, já nas applicações das soluções obtidas. «Esta explicação geral é tanto mais indispensavel quanto, pela natureza mesma do assumpto, esse estudo das diversas propriedades de cada linha e de cada superficie compõe necessariamente a grande maioria do conjunto das pesquisas geometricas.» Com effeito, já vimos que as questões immediatamente relativas ás *rectificações*, ás *quadraturas* e ás *cubaturas*, são evidentemente, por si mesmas, em numero muito limitado para cada forma considerada. Pelo contrario, o estudo das propriedades de uma forma apresenta ao espirito humano um campo naturalmente indefinido, no qual se póde sempre esperar fazer novas descobertas.

«Resulta dahi que o dominio da *geometria* é necessariamente indefinido, mesmo que ella se limitasse ao estudo de uma forma unica. Percebe-se ao mesmo tempo a necessidade, theorica e pratica, de systematizar o surto empiricamente de-

senvolvido nos principaes casos geometricos. Mas, taes considerações mostram tambem quanto é preciso regular uma cultura espontaneamente disposta a degenerar em especulações ociosas. Salvo á linha recta e ao circulo, em que a observação fornece immediatamente os melhores caracteres theoricos e praticos, todas as figuras devem duplamente exigir um preambulo que só a disciplina positiva póde adaptar á sua destinação.»

Estas reflexões nos fazem ao mesmo tempo conceber o caracter e as condições de semelhante disciplina. Porque, por um lado, é necessario que ella garanta o desenvolvimento dos estudos preliminares de modo a permittir theoricamenne a solução das questões finaes e a efficacia de sua adaptação pratica; e por outro lado, urge impedir a expansão das divagações ociosas. Ora, ambos esses aspectos nos vão mostrar ainda melhor toda a vastidão do dominio geometrico.

Com effeito, em primeiro lugar, elaborada convenientemente, a theoria preliminar de cada figura consiste em ligar o conjunto de suas propriedades, e por conseguinte a sua medida, á definição emanada da observação ou da imaginação e, as mais das vezes, do concurso de ambas. Referidos a esse caracter preponderante (a definição), os outros attributos adquirem uma consistencia que sem *augmentar a certeza directa* da verificação especial, desenvolvem a racionalidade geral de tal systema. Por falta dessa subordinação (de todas as propriedades á definição) a *geometria* não poderia preencher assaz o seu *officio logico*, conquanto permanecesse por vezes dotada de sufficiente *efficacia scientifica*.

Salvo os casos em que essa connexidade suscita artificios demasiadamente contornados, a constituição normal do principal dominio mathematico *(geometria)* exige tal elaboração. Vê-se assim que a necessidade logica de racionalidade positiva, caracterizada sobretudo pelo *methodo constructivo*, exige por vezes o estudo de *propriedades* que não têm outra utilidade senão esse officio logico.

Assim, sob o aspecto da theoria de cada figura, a constituição normal da *geometria* deve desenvolver o estudo das formas:

1.º quanto baste para conseguir a medida da extensão;

2.º quanto baste para permittir o estabelecimento da harmonia entre o abstracto e o concreto;

3.º quanto baste para a *coordenação* de todas as pesquisas, de modo a poder representar todos os attributos de cada fórma como deduzidos de sua definição mais caracteristica.

Ora, dessas três condições, a medida e a applicação pratica dos resultados obtidos ficariam, por sua natureza, vagas, si deixassemos ao acaso a pesquisa das propriedades.

Sente-se assim a necessidade de instituir o estudo de cada fórma por um methodo que permitta reconhecel-a qualquer que seja a propriedade, mesmo desconhecida, que a natureza ou o problema da industria offerecer. Isto é, em vez de estudar indefinidamente, por exemplo, as propriedades do circulo, afim de habilitarmo-nos a reconhecel-o, devemos preoccuparnos com instituir meios de decidir, dada uma propriedade qualquer, si ella corresponde ao circulo, e a que circulo.

Só assim ter-se-ha certeza de não trabalhar em vão. Pois que, por mais numerosas que forem as propriedades estudadas de cada forma, jamais se poderia ter a certeza de que aquella que fosse suscitada por cada caso concreto entrasse no numero das propriedades conhecidas.

Ao passo que, si estivessemos habituados a decidir em qualquer momento qual a forma que goza de uma propriedade dada, o problema da harmonia entre a theoria e a pratica achar-se-ia resolvido, tanto quanto o exigem as necessidades humanas. Veremos que tal foi o resultado da moderna *geometria* fundada por Descartes. (2 a)

(2 a) Notas do curso professado no Apostolado Positivista do Brasil pelo eminente cidadão R. Teixeira Mendes.

§ 3.º

Base concreta da geometria; constituição fundamental e divisão geral desta sciencia

21 — Mostrámos até aqui a extensão da *geometria*, considerando o estudo de cada fórma. Mas a definição acima levanta uma outra questão: quaes as fórmas de cuja medida e de cujas propriedades se occupa a *geometria?* E' evidente, em primeiro lugar, que a *geometria* não se pode propor ao estudo da medida theorica de uma *forma* qualquer. Por exemplo, ninguem espera achar jamais as leis que ligam o volume de uma montanha ou de um rio ás rectas e ás curvas que podem ser traçadas nelles. Em taes casos, a *geometria* propõe-se unicamente a suggerir modos de decompor a fórma que se quer avaliar em outras sufficientemente pequenas, ou a substituil-a por outras, para permittir a sua assimilação com as fórmas ideaes que ella estuda, sem que dahi resulte erro consideravel para a medida.

A apreciação desse erro é aliás muito relativa; pode ser de metros, de kilometros, de millimetros, decimetros, etc... conforme os casos. Assim, quando se trata do volume da Terra, ou dos corpos celestes cuja fórma nos é accessivel, como o Sol, a Lua, os planetas e seus satellites, ou os cometas, a avaliação despreza as *irregularidades* que ahi se encontram, substituindo o contorno *real* por uma superficie ideal destinada a dar uma representação do conjunto.

Isto basta para mostrar, em primeiro lugar, que a *geometria* só estuda fórmas abstractas, isto é, mais ou menos ideaes.

Porém essas fórmas ideaes são em numero realmente *infinito* e todas se filiam, directa ou indirectamente, ao exterior; isto é, todas essas fórmas foram directa ou indirectamente suggeridas pela observação.

Aqui, como sempre, a intelligencia apenas coordenou os elementos hauridos na contemplação do Mundo. De sorte que a *geometria* nos offerece sob esse aspecto um caracter ao mesmo tempo abstracto e concreto, ou *ideal* e *real*. Mas alem disso, as propriedades fundamentaes das fórmas, quer particulares quer geraes, foram obtidas por *inducção* como em qualquer outro caso. Em uma palavra, a *geometria* é uma sciencia de observação, como as demais. E as reflexões com que encetámos o paragrapho anteprecedente mostram que ella tem por objecto descobrir as leis do Mundo que nos são accessiveis pelo tacto, como outras partes da Physica se propõem a descobrir as leis que nos são accessiveis pela musculação, audição, visão, electrição, etc...

22 — Importa reconhecer que, apesar da evidencia desta observação, ella foi mais ou menos contestada antes do Positivismo. A Metaphysica esforçava-se mesmo, mais do que nunca, por escurecer o caracter concreto da *geometria*, mediante sophismas, algumas vezes decorados com o apparato do symbolismo algebrico. Foi A. Comte quem patenteou o caracter inductivo da Logica (Mathematica) em qualquer de seus termos, *calculo*, *geometria*, ou *mecanica*.

Para dissipar, de uma vez por todas, os sophismas a tal respeito, convem examinar de um modo geral a constituição dos diversos termos da jerarchia theorica.

«Comparada com o *calculo*, a *geometria* apresenta um caracter *concreto*, comquanto seja abstracto comparativamente ás sciencias mais elevadas, segundo um contraste essencialmente relativo que se desenvolve em toda a jerarchia theorica. Isto quer dizer que a *geometria* aprecia melhor a *realidade* do que o *calculo*, e menos do que as sciencias superiores, mas o mesmo se dá por toda parte.

A' medida que se sobe na escala theorica, as sciencias vão estudando cada vez mais os phenomenos como ligados aos entes. Assim, a aprèciação numerica não distingue attributo algum alem da existencia, e essa existencia póde ser mesmo puramente subjectiva: A *geometria* já considera as propriedades connexas da *fórma*, da *extensão* e da *posição*, mas em corpos quasi totalmente ideaes, não só quanto aos seus attributos, mas tambem quanto ao isolamento de taes attributos: a *geometria* considera fórmas inertes. Em *mecanica*, já se olham os corpos com o grau mais simples de actividade.

A *astronomia* estuda os corpos celestes sob a totalidade dos seus aspectos perceptiveis á Humanidade. Quanto ao estudo da Terra, só se apreciam ahi as condições mais fundamentaes da existencia inorganica. Com effeito, a *physica* considera todos os corpos que se acham na superficie da Terra, desde que a sua substancia não se altere. Finalmente a *chimica* considera os corpos inorganicos terrestres na integridade de sua existencia. A sua deficiencia patenteia-se, entretanto, mesmo sob o ponto de vista material, porque não conta com as reacções devidas aos entes organicos. Essa imperfeição é, porém, sobretudo decisiva quando se consideram os seres organizados.

Passando-se á Moral, percebe-se logo que o ultimo de seus termos estuda a realidade dos seres e dos phenomenos. Com effeito, a *biologia* só permitte estudar de um modo completo a vegetalidade, abstrahindo das reacções devidas á animalidade.

E a *sociologia* considera o conjunto dos attributos animaes, porém sem apreciar convenientemente os factos affectivos e as suas reacções. Emfim a *moral* propriamente dita, na sua parte *theorica*, abstrahe das differenças individuaes. E' só na *pratica* que se encontra o typo completo da concreção.

Assim, em resumo, é só a *algebra*, viciosamente separada

das suas duas origens, arithmetica e geometrica, que corresponde á plenitude de abstracção, incompativel com a positividade. (3 a)

23 — Leibnitz e os philosophos que depois de Descartes precederam A. Comte já haviam reconhecido reciprocamente que *o caracter plenamente concreto só se manifesta nas especulações puramente praticas*, ás quaes não comportam nenhuma systematização. Mas, foi o Fundador do Positivismo que demonstrou ser todo o dominio da Philosophia Segunda ao mesmo tempo abstracto e concreto, conforme graus sempre crescentes ou decrescentes em virtude do posto encyclopedico.

Com effeito, apreciado convenientemente, o *calculo*, com quanto mais abstracto do que todo o resto da jerarchia theorica, não se mostra jamais desprovido de caracter concreto, pois que «toda noção de *numero* emana do mundo exterior, mesmo quanto ao mundo interior.»

Deve-se normalmente considerar a Philosophia Primeira e a Philosophia Terceira como typos necessarios da abstracção e da concreção, uma concernendo ao conjunto dos phenomenos, e a outra ao dos sêres. Ligada a ambas, afim de instituir o laço entre ellas, a Philosophia Segunda participa simultaneamente dos seus respectivos caracteres, de cuja combinação fórma os que lhe são proprios, conforme se approxima mais de uma ou de outra. Todavia, essa constituição mixta não pôde ser inteiramente apanhada senão depois que A. Comte concebeu directamente o triplice conjunto da verdadeira philosophia.

Uma tendencia habitual ao absoluto fazia antes fluctuar cada sciencia entre a apreciação puramente subjectiva e a attitude plenamente objectiva, inclinando-a mais para uma ou para outra, segundo a sua posição encyclopedica. Sob o empirismo

---

(3 a) Notas do curso professado no A. Positivista do Brasil, pelo Cidadão R. Teixeira Mendes.

academico, a mathematica foi mesmo julgada puramente deductiva; a inducção, que o seculo XVII reconhecia nella, tornou-se gradualmente despercebida á medida que a *algebra* prevaleceu.

«Si a *arithmetica* é incontestavelmente fundada na observação exterior, é de toda necessidade que a *geometria* offereça mais esse caracter, que a *mecanica* deve desenvolver melhor. Elle não foi inteiramente menosprezado senão sob o impulso algebrico, durante a ultima phase da anarchia occidental.»

24 — E' pois de justiça reconhecer que foi A. Comte, desde o inicio de seus trabalhos, quem erigiu a *geometria* em *sciencia de observação*, apesar dos protestos metaphysicos de todos os falsos theoristas.

Um exame directo justifica plenamecte esse juizo quanto aos estudos primitivos que, concentrados na *linha recta* e no *circulo*, tiraram evidentemente do exterior as propriedades fundamentaes a que se devem ligar os outros attributos muitas vezes induzidos tambem. A mesma apreciação deve ser indirectamente estendida á maior parte das theorias especiaes posteriormente instituidas pela *geometria antiga*, pois que nellas concorrem figuras derivadas dessas duas fontes, mediante construcções planas ou reversas.

Para tornar bem patente esta apreciação, basta indicar summariamente como foram introduzidas as outras fórmas de que se occupava a *geometria* antes da renovação cartesiana, alem da *linha recta*, do *circulo*, do *plano* e da *esphera*.

Teremos assim o ensejo de reconhecer ao mesmo tempo a vastidão do dominio geometrico e a exactidão da definição que foi dada da *geometria*; porque as fórmas foram inventadas para resolver problemas de *medida*. Com effeito, a *duplicação do cubo*, a *trisecção do angulo rectilineo* e a *quadratura do circulo* foram o incentivo e o guia da imaginação dos geometras antes de Descartes.

25 — «Todos os geometras limitaram-se a principio a con-

siderar as fórmas mais simples que a natureza nos fornecia immediatamente, ou que se deduziam desses elementos primitivos pelas combinações menos complicadas.» Ora, o exame menos aprofundado bastará para fazer comprehender que essas fórmas apresentam uma variedade infinita.

Relativamente ás linhas curvas, considerando-as como geradas pelo movimento de um ponto sujeito a uma certa lei, é claro que se terá em geral tantas curvas differentes quantas leis distinctas se suppuzer para este movimento que se pode evidentemente operar sob uma infinidade de condições diversas, embora possa acontecer accidentalmente, por vezes, que novas gerações produzam curvas já obtidas.

Assim, limitando-nos a curvas planas, si um ponto se move de modo a ficar constantemente equidistante de um ponto fixo, gerará um *circulo;* si fôr a somma ou a differença da distancia de dois pontos fixos que ficar constante,—a curva descripta será uma *ellipse* ou uma *hyperbole;* si fôr o seu producto será uma outra curva differente *(oval de Cassini);* si o ponto afastar-se sempre igualmente de um ponto e uma recta fixos descreverá uma *parabola;* si girar sobre um circulo ao mesmo tempo que este sobre uma linha recta, ter-se-ha uma *cycloide;* si avançar ao longo de uma recta, ao passo que essa recta, fixada por um dos seus extremos, girar de uma maneira qualquer, resultará o que se chama em geral as *espiraes*, que só por si apresentam evidentemente tantas curvas perfeitamente distinctas, quantas relações differentes se podem suppor entre estes dois movimentos de translação e de rotação, etc.

Cada uma dessas diversas curvas pode depois fornecer novas, pelas differentes construcções geraes imaginadas pelos geometras, e que teremos ensejo de caracterizar opportunamente. Emfim, existe uma variedade ainda maior nas curvas situadas sobre as superficies curvas, e por isso justamente chamadas de *dupla curvatura.*

«Relativamente ás superficies, as fórmas são necessaria-

mente mais diversas ainda, concebendo-as como geradas pelo movimento das linhas. Com effeito, a fórma pode então variar, não sómente considerando como nas curvas as differentes leis em numero infinito, ás quaes pode ser sujeito o movimento da linha geratriz, mas tambem suppondo que essa linha mesma vem a mudar de natureza, o que não tem analogo nas curvas, porque os pontos que as descrevem não podem ter figura distincta.

Duas classes de condições muito diversas podem, pois, fazer variar as fórmas das superficies, ao passo que só existe uma para as linhas. Seria inutil citar especialmente uma serie de exemplos para verificar essa multiplicidade duplamente infinita que se nota entre as superficies. Bastará para fazer uma idéa considerar a extrema variedade de superficies chamadas *regradas*, isto é, geradas pela *linha recta*. Se a recta move-se parallelamente a si mesma, apoiando-se em uma certa curva, tem-se a familia das *superficies cylindricas*; se a recta passa por um ponto fixo e se apoia sobre uma curva qualquer, tem-se a familia das superficies *conicas*; se a recta move-se parallelamente a um plano, apoiando-se sôbre uma recta fixa e sobre uma curva qualquer, tem-se a familia dos *conoides*, etc.

«Quanto aos volumes, não ha lugar para consideração alguma especial, pois que elles não se distinguem entre si senão pelas superficies que os terminam.»

Afim de completar esse apanhado geometrico, é preciso accrescentar que as superficies fornecem um novo meio geral de conceber curvas novas, pois que cada curva póde ser encarada como produzida pela intersecção de duas superficies. Esse modo de geração é suggerido pela observação, que nos mostra por toda a parte a curva do horizonte como resultante da intersecção de um plano terrestre com a esphera celeste.

«Foi assim, com effeito, que foram obtidas as primeiras linhas, que se podem considerar como realmente inventadas pelos geometras, pois que a natureza dava-lhes immediata-

mente á linha *recta* e o *circulo* (3 b). Sabe-se, com effeito, que a *ellipse*, a *parabola*, e a *hyperbole*, as unicas curvas completamente estudadas pelos antigos, tinham sido unicamente concebidas a principio como resultantes da intersecção de um cone de base circular por um plano diversamente situado.»

«E' evidente que, pelo emprego desses diversos meios geraes para a formação das linhas e das superficies, poder-se-ia produzir uma serie rigorosamente infinita de fórmas distinctas, partindo sómente de um numero muito pequeno de figuras directamente fornecidas pela observação. Apesar, porém, dessa variedade de fórmas e do caracter ideal da immensidade dellas, tudo quanto precede mostra que resultam de combinações dos elementos fornecidos pelo Mundo. Supprimam-se a linha recta e o circulo, e não poderemos conceber mais fórma alguma.

26 — Todas estas considerações demonstram claramente a base concreta da sciencia geometrica; mas si qualquer duvida restasse a tal respeito, bastaria para dissipal-a a comparação deste dominio com o da *physica* propriamente dita, typo ordinario da objectividade.

A *geometria* offerece com elle uma semelhança que nenhum espirito bom póde desconhecer, e sobre a qual repousa o contacto normal das duas sciencias. «A theoria do *circulo*, por exemplo, comparada á da *gravidade*, apresenta um encadeamento analogo de propriedades, respectivamente subordinadas ás leis fundamentaes emanadas da observação exterior.» Cumpre todavia observar que a *mathematica* ou *logica* apresenta, em relação á *physica*, uma composição mais homogenea e mais systematica, posto que a successão dos assumptos obedeça ahi á mesma regra. Com effeito, a todos os respeitos, a *physica* constitue o elemento menos ligado da philosophia segunda, em virtude da diversidade natural de seus aspectos

---

(3 b) Este nos é suggerido pela linha do horizonte quando nos achamos numa planicie, e a linha recta nos é indicada pela contemplação de um raio luminoso.

objectivos, cuja ligação é unicamente subjectiva, apesar da dependencia real dos dominios correspondentes.

30 — O conjunto das considerações precedentes nos deixa vêr que a cultura da *geometria* ficou restricta por muito tempo ás diversas propriedades caracteristicas de cada fórma, necessariamente considerada com o fim de facilitar a sua medida e garantir a sua applicação real. Mas este estudo preliminar, especialmente consagrado a cada fórma, impelliu espontaneamente a *geometria* para a sua constituição geral e definitiva. Porque aos typos geometricos naturaes foram desde logo incorporados aquelles que se puderam derivar delles, directa ou mesmo indirectamente, e deste modo a *geometria* tendeu para uma plena generalização das doutrinas e dos methodos. De outro modo a sciencia mathematica não poderia obter uma constituição philosophica que fosse assás conforme ao seu destino encyclopedico e mesmo ás suas applicações praticas.

A' generalidade espontanea das questões, sobretudo sensivel para as mais usuaes, oppunha a *geometria antiga* a irracional, embora inevitavel, especialidade das soluções correspondentes. Um tal inconveniente só havia de desapparecer com a fundação da *geometria moderna*. Semelhante passo só podia, porém, ser realizado quando o exigissem as necessidades sociaes e depois que a *algebra* se tivesse constituido, desprendendo-se de suas duas fontes, arithmetica e geometrica. Porque estudando as propriedades relativas a todas as fórmas, em vez de apreciar separadamente cada uma dellas, a *geometria moderna* exigiu que a diversidade das figuras fosse reduzida á das relações correspondentes entre as grandezas uniformes que definem a situação do ponto descrevente, seja qual fôr a fórma a que este pertença.

Substituindo assim as multiplas definições das fórmas pelas suas equações unicas, a nova *geometria* simplificou assás a comparação dellas, permittindo que a consideração de suas propriedades pudesse ser directamente proseguida com toda a

generalidade que convem a cada uma. Eis porque a fundação da *geometria geral* só pôde ter lugar modernamente depois dos trabalhos algebricos de Viète: O fundador da nova *geometria* foi Descartes (1596-1650), o eminente creador da philosophia mathematica.

Vê-se assim que a constituição historica e dogmatica da verdadeira Logica exige que se faça preceder a *geometria geral* do necessario estudo da *geometria especial*. A esse preambulo indispensavel pode a *algebra* ser accessoriamente applicada á maneira dos antigos, dando-se-lhe, porém, um desenvolvimento mais efficaz, afim de preparar a sua missão na *geometria* geral. Porque esta só pode comportar a intervenção algebrica quando a elaboração directa tiver feito sufficientemente surgir as equações mais apropriadas a cada fórma.

A *geometria especial*, que deve preparar a *geometria geral*, é normalmente reductivel ao estudo das fórmas rectilineas e circulares. Entretanto, convem completar o desenvolvimento desse dominio fundamental com o esboço necessario das mais simples especulações sobre as principaes figuras que os antigos e mesmo os modernos têm isoladamente considerado. Rapidamente apreciadas, ellas farão melhor sobresair a natureza e a necessidade da generalização abstracta, que sómente póde adaptar a *geometria* ao seu destino theorico e pratico.

Assim, pois, a *geometria preliminar* deve preparar o estudo da *geometria geral*, apreciando especialmente as propriedades relativas a cada uma das fórmas afim de permittir a respectiva medida; a *geometria algebrica* aprecia geralmente as propriedades communs a todas as fórmas imaginaveis, permittindo o seu reconhecimento e garantindo, portanto, a sua applicação. Subordinando as noções especiaes ás concepções geraes, a nova *geometria* estabelece uma harmonia, outrora impossivel, entre a uniformidade espontanea dos problemas e a uniformidade systematica das soluções. Semelhante accordo repousa, conforme veremos, sobre a representação das figuras

por equações, subordinando deste modo o abstracto ao concreto.

Não devemos levar mais longe estas considerações, visto como o nosso objectivo é, por emquanto, o estudo da *geometria preliminar* ou *especial*. A respeito da *geometria geral* ou *moderna*, diremos apenas que ella reagiu sobre o *calculo algebrico* que a fizera surgir, impellindo-o para uma fórma transcendente que devia logicamente ligar a *geometria* á *mecanica*. Para se ter uma idéa da influencia desse *calculo transcendente* sobre o dominio geometrico, basta observar que a principal difficuldade das questões relativas á medida da extensão consiste em reduzir a apreciação das figuras curvilineas ao caso das rectilineas. O methodo infinitesimal foi espontaneamente instituido por Archimédes afim de resolver estas difficuldades na *geometria antiga*, reduzindo os casos mais complicados aos mais simples pela substituição ideal das fórmas curvilineas pelos seus elementos infinitamente pequenos, suppostos sempre rectilineos.

Mas no uso dêsse methodo, a *geometria antiga* não empregava, segundo sua natureza, senão artificios especiaes para a eliminação final dos elementos auxiliares, assim substituidos ás grandezas directas. Era, pois, necessario introduzir um novo calculo afim de que esta eliminação podesse adquirir a generalidade exigida pela generalização moderna do methodo primitivo. Semelhante instituição foi realizada por Leibnitz (1646-1716), o verdadeiro fundador do *calculo infinitesimal*, quer *differencial*, quer *integral*. O *calculo differencial* systematiza a substituição abstracta das grandezas consideradas pelos seus elementos infinitesimaes, cujo conjunto *differe* cada vez menos das mesmas grandezas; o *calculo integral* vem completar esse trabalho logico, instituindo a eliminação das grandezas infinitamente pequenas e definindo o seu conjunto, isto é, a *integridade* dellas. Assim constituido, tornou-se o *calculo infinitesimal* um complemento necessario da *geometria algebrica* ou *cartesiana*.

Porque as questões geometricas que não lograram ser resolvidas com o concurso da *algebra directa* ou *ordinaria* puderam ser abordadas com o auxilio dessa *algebra indirecta* ou *transcendente*. Surgiu deste modo a *geometria transcendente*, a principio sob a fórma *differencial*, e depois sob a fórma *integral*. (3 c).

Logo estendido á *mecanica*, o *calculo infinitesimal* acabou de constituir o dominio mathematico, graças sobretudo á coordenação que deu Lagrange ao ultimo elemento deste. Embora semelhante calculo ficasse ahi impotente para resolver as questões especiaes, elle conservou sua preciosa aptidão para desenvolver e coordenar as especulações que constituem o principal objecto da *mecanica racional*. Póde-se desde então olhar a sciencia fundamental como irrevogavelmente estabelecida, por isso que ella havia elaborado successivamente as três partes iniciaes do seu dominio normal, não deixando a desejar senão a systematização inseparavel das outras sciencias, dada afinal por A. Comte. O quadro seguinte reune assim os differentes ramos do dominio geometrico:

GEOMETRIA	ELEMENTAR	ESPECIAL OU PRELIMINAR
		GERAL OU ALGEBRICA
	TRANSCENDENTE	DIFFERENCIAL
		INTEGRAL

(3 c) Foi o estudo das questões relativas ás *tangentes*, bem como aos contactos de diversas ordens entre duas curvas ou duas superficies, que deu lugar ao advento da *geometria differencial*; mas a medida das grandezas cujos elementos essencialmente variaveis não podiam ser sommados por partes infinitas, solicitou desde logo a creação da *geometria integral*.

CAPITULO II

Instituição systematica da geometria:
Concepção abstracta da extensão, donde theoria do espaço e dos typos;
resumo historico da evolução preliminar da Geometria

§ 4.°

Concepção abstracta da extensão: I theoria da abstracção (4 a)

31 — Afim de concluir a apreciação geral da *geometria*, só nos resta examinar a concepção da *extensão*, tal como é considerada nesta sciencia. Porque, como todas as acquisições do espirito humano, esta concepção foi a principio concreta, e sómente mais tarde adquiriu o caracter abstracto que hoje manifesta.

Mas, para que esta apreciação possa ser feita de modo completo, precisamos examinar previamente em que consiste a operação do espirito humano a que se chamou *abstracção*. Este exame tem a vantagem de deixar bem clara a ligação entre o exterior e o interior, ou a subordinação necessaria de

---

(4 a) A theoria estatica e dynamica da abstracção constitue o preambulo geral da Philosophia Primeira. Não se achando esta nos programmas officiaes, pareceu-nos conveniente collocar aqui as indispensaveis noções sobre tal theoria. Supprimos assim o ponto de vista dogmatico pelo ponto de vista historico, porque as primeiras relações abstractas que o espirito humano conheceu foram descobertas em Geometria pelo immortal Thales.

nossas concepções para com a realidade objectiva donde ellas emanam.

32 — Referindo-nos á noção de *extensão*, dissemos no capitulo precedente que ella nos era fornecida pelos sentidos do *tacto* e da *visão*. Isto tem lugar porque os seres por nós observados se nos apresentam simultaneamente ao espirito por intermedio daquelles dos nossos sentidos que por elles podem ser impressionados.

«Consideremos, por exemplo, differentes espheras de metaes diversos. Por intermedio dos sentidos, esses corpos nos apresentam as qualidades que possuem, de *côr*, *peso*, *som*, *densidade*, *elasticidade*, *dureza*, etc.»

«Desde então, o nosso cerebro, por um trabalho especial, permitte abstrahir de todas essas qualidades para só considerar a *fórma*, e seremos assim levados a concluir que ha uma fórma commum a todos elles. Uma vez obtida esta noção, independentemente dos corpos em que a observamos, podemos estudal-a em suas propriedades caracteristicas, e por tal modo que, em qualquer parte onde existam objectos esphericos, possamos reconhecer esta fórma independentemente de outra qualquer propriedade.»

«Portanto, a consideração da *fórma*, como isolada de todos os outros phenomenos que a acompanham, nos leva assim á idéa geral de *fórma espherica*, permittindo-nos construir um typo puramente ideal, inteiramente abstracto, e cuja existencia é apenas subjectiva, por isso que só existe no nosso cerebro.»

«Essas ideas geraes, esses typos abstractos obtidos pela faculdade que tem nossa organização cerebral de poder considerar as propriedades dos seres delles isoladas, e cada uma de per si, convenientemente cultivadas pelo trabalho cerebral, formaram todas as nossas construcções abstractas, nas quaes se resume o mais precioso cabedal scientifico da Humanidade.

No dominio da Arte, não é menos precioso o papel da *abstracção*. O facto de podermos considerar as propriedades

quaesquer dos corpos, as suas qualidades delles isoladas, e generalizar as noções correspondentes a outros seres que apresentam caracteres similhantes ou identicos, traduzindo essas propriedades pela *palavra* destinada a representar o ser que as possue, tem sido sempre o recurso inexgotavel de que os poetas tiram as suas mais bellas comparações e suas imagens mais delicadas.

A abstracção, permittindo-nos separar dos corpos observados as qualidades, que elles possuem, nos proporciona meios de podermos construir typos abstractos dotados de elevado gráo de perfeição, verdadeiros modelos dos quaes tudo devemos fazer para nos aproximar. A educação ou a instrucção, e os bons exemplos têm por fim principal fazer com que cada individuo se aproxime, moral e intellectualmente, de um typo abstracto de Homem que a observação nos leva a construir mentalmente como sendo aquelle que deveriamos ter para que a existencia em sociedade fosse a mais feliz possivel.

E' despindo por bem dizer os seres das propriedades que os constituem, que a abstracção nos permitte estudal-as separadamente umas das outras, combinal-as e destarte construir esses typos ideaes cuja noção traduzimos pelos nomes de *Familia*, *Patria Humanidade*, etc. Por exemplo os homens não são todos iguaes, mas todos apresentam certas propriedades communs, como a intelligencia, o sentimento, a actividade, uma certa organização, que, apreciadas e consideradas em si e combinadas em nosso cerebro, nos fornecem o typo abstracto do *homem* que se estuda na Moral.

Entre os homens, os animaes e os vegetaes ha propriedades communs como a *nutrição*, o *crescimento*, etc., que, consideradas abstrahindo de todas as outras que concorrem para differenciar esses seres, nos fornecem a noção abstracta que traduzimos pela palavra *vida*, e o typo que denominamos *ser vivente*.

No dominio cosmologico, o papel da abstracção é ainda

mais importante; só ella permitte generalizar e systematizar os respectivos phenomenos, para o que exige a apreciação de muitos seres nos quaes se manifesta a propriedade considerada, de modo a permittir seja formulada completamente a noção abstracta que lhe corresponde.

33 — Com os exemplos precedentes, vê-se desde já que os differentes typos abstractos adquiridos por nosso espirito não foram elaborados na mesma época, pois que os phenomenos cuja apreciação devia permittir-nos construil-os foram tambem estudados em épocas muito differentes. E' assim que o typo abstracto do *homem* só pôde ser definitivamente construido quando os factos vitaes, intellectuaes e moraes foram sufficientemente apreciados.

Do mesmo modo, o typo abstracto da *sociedade* só pôde ser scientificamente elaborado com a instituição definitiva da *sociologia*. A' proporção, porém, que os seres foram melhor observados, que a mentalidade foi-se desenvolvendo, a abstracção tornou-se mais precisa, a elaboração mais exacta, e os typos abstractos, subordinando-se com rigor ás verdades observadas, se tornaram então scientificos.

Esta elaboração abstracta, puramente intellectual e essencialmente destinada á explicação do Mundo e do Homem, sendo traduzida pela linguagem, pôde ser transmittida pelos que a realizaram áquelles com quem conviviam, constituindo-se assim a solidariedade e continuidade do conjunto humano, e estreitando as relações mutuas indispensaveis ao seu desenvolvimento normal.

34 — Ha em toda construcção scientifica duas sortes de elementos que é necessario distinguir: as *propriedades abstractas* e as *relações abstractas*. As primeiras são as que o trabalho cerebral separa da observação de muitos corpos a que são communs, taes como: o peso, a côr, a dureza, o cheiro, etc.; as segundas resultam da comparação das propriedades abstractas da mesma ou de differente natureza, como por exemplo, a relação entre o caminho percorrido por um corpo

que cae e o tempo gasto em percorrel-o (4 b), a relação entre o volume de um gaz e a pressão que elle supporta, etc.

Facilmente comprehende-se que as propriedades abstractas são muito mais simples de determinar do que as relações abstractas. Por isso mesmo, emquanto aquellas datam da mais remota antiguidade, estas ultimas só começaram a ser scientificamente elaboradas com o theorema de Thales. Este accrescimo de difficuldade de uma á outra phase da elaboração abstracta nos é plenamente compensado pela maior importancia dos resultados correspondentes, os quaes nos permittem attingir o verdadeiro fim de todas as nossas indagações scientificas — a *previsão.*

As propriedades abstractas constituem essa massa de ideas communs sem as quaes não podem existir relações um pouco extensas entre os homens; ellas fornecem os materiaes e uma base para a construcção das relações abstractas, e nada mais. O papel, porém, das relações abstractas tem uma outra importancia. Pela estreita dependencia que ellas estabelecem entre dois phenomenos da mesma ou de differente natureza, a descoberta de uma relação abstracta nos permitte, dadas as modificações de um phenomeno, prever as do outro. Si, por exemplo, chegamos a conhecer a relação entre a circumferencia do circulo e o seu raio, torna-se facil determinar qual a circumferencia para um raio dado, ou reciprocamente qual deverá ser o raio para uma circumferencia dada. Toda a industria moderna sendo baseada sobre taes conhecimentos, torna-se desnecessario demonstrar a utilidade das relações abstractas. Concebe-se tambem que as previsões que ellas permittem serão tanto mais seguras quanto mais precisas tiverem sido as relações estabelecidas; e por sua vez a acção modificadora do homem sobre os phenomenos se torna mais segura nos dominios mais susceptiveis de similhante intervenção.

(4 b) Moraes Rego. Algebra Elementar. — Rio, 1886.

Comquanto as propriedades abstractas nos sejam fornecidas pela observação do Mundo, o nosso espirito póde combinal-as arbitrariamente de modo a obter os typos mais phantasticos e extravagantes. Por exemplo, a nossa imaginação póde traçar num campo visual não esclarecido as linhas que lhe agradam; e como as fórmas dependem das linhas que as limitam, as quaes podem variar infinitamente, este modo de acção do cerebro deve muitas vezes crear figuras que nunca tiveram existencia real. Uma imaginação menos viva contentar-se-á em combinar as imagens anteriormente observadas: de unir por exemplo as asas de um passaro ás espaduas de um cavallo, ou uma cauda de peixe ao corpo de um quadrupede, etc. A imaginação, porém, que possue uma grande actividade não se limita a combinar assim as idéas já obtidas; ella quer ainda modifical-as, estendel-as e transformal-as. «Quando Gœthe, com os olhos fechados, figurava a si mesmo uma flôr, esta fórma, como elle mesmo me contou, soffria mudanças as mais notaveis, desenvolvendo-se novas flôres tendo outras fórmas, metamorphoseando-se assim numa infinidade de figuras, todavia com certa regularidade e symetria.» (Müller t. 2.º, pg. 518).

Quanto á *construcção* que resulta da combinação das relações abstractas, o facto é inteiramente outro, ella nos fornece uma traducção abstracta do mundo exterior, approximada, é verdade, porém sufficiente para nos permittir o conhecimento necessario á satisfação de nossas necessidades reaes; ella constitue o nosso cabedal scientifico, que nos proporciona conhecer desde o phenomeno mais simples do mundo inorganico até o facto mais complicado da existencia moral. Assim é que uma vez conhecidas e demonstradas, as relações moraes se nos impõem ao espirito de modo a tornar inabalavel a nossa adhesão ás crenças scientificas, e a permittir o estabelecimento de uma completa unidade em todos os cerebros.

Apenas um similhante resultado seria muito mais simples

e mais rapidamente obtido si as demonstrações não fossem se tornando mais complicadas e muito menos precisas, á proporção que passamos da consideração dos phenomenos mais geraes e mais simples aos mais complicados e particulares do dominio moral.

Em resumo, as *construcções abstractas* compõem-se de dois elementos: as *propriedades* e as *relações abstractas*. Mas para realizal-as torna-se necessario que o nosso cerebro satisfaça a determinadas condições que passamos a examinar.

35—Importa reconhecer, em primeiro lugar, que a abstracção é o resultado do concurso de todas as nossas faculdades intellectuaes, impulsionadas para um mesmo fim pela acção das outras regiões do cerebro, a região affectiva e a região pratica. Esta concepção scientifica mostra o quanto é errado suppor-se, como os metaphysicos, que a abstracção é uma faculdade distincta de nossa alma e sem séde alguma mental, como são consideradas nesse systema philosophico todas as outras faculdades.

O nosso cerebro é, na verdade, a séde de todas as nossas faculdades superiores; é um apparelho composto de orgãos destinados a preencher cada um uma determinada funcção.

A *alma* é constituida pelo conjunto das funcções intellectuaes, moraes e praticas. Essas funcções são todas exercidas pelo cerebro que assim se acha subjectivamente dividido em tres regiões: uma relativa a intelligencia, na sua parte anterior; outra relativa ao sentimento, na parte posterior; e finalmente outra relativa ao caracter, na sua parte mediana.

Tal é o resultado dos trabalhos scientificos de *Broussais*, *Blainville*, etc., e finalmente de Gall que permittiram a A. Comte a fundação da *theoria positiva da alma*.

Segundo essa theoria, o *sentimento* é, não só necessario para inspirar as nossas concepções de que constitue o mais energico estimulante, como tambem nos serve de coordenador quando procuramos unificar todos os nossos conhecimentos. E' facto, com effeito, que cada um póde verificar em si mes-

mo, que quanto mais fraca é a estimulação moral em nossa alma, tanto menos disposta se torna a intelligencia para o trabalho.

A elaboração intellectual é sempre realizada sob a inspiração dos instinctos de conservação, desde o instincto nutritivo até o maternal, e dos instinctos altruistas, desde o apego até a nobre e elevada bondade ou sympathia universal, com assistencia dos instinctos de destruição, construcção e vaidade.

Além dessas qualidades relativas ao *sentimento*, cumpre notar que as de *caracter* são tambem indispensaveis aos trabalhos intellectuaes. Sem *coragem*, *prudencia* e *firmeza*, isto é, sem *perseverança*, nada póde ser realizado. Kepler e Lagrange, como observava Laffitte, foram tão ousados e perseverantes quanto Turenne e Cesar. Mas, emquanto estes, pelas graves consequencias que podiam resultar de suas precipitações, eram sempre prudentes, aquelles, como theoricos, eram muito mais temerarios. (4 c)

Qualquer elaboração abstracta, portanto, embora realizada pelo apparelho intellectual, exige sempre um movel affectivo que inspire e estimule a região mental, como tambem a satisfação de certas condições relativas ao conjunto da actividade, que tem de manter a persistencia, ou a constancia indispensavel a qualquer acquisição em que as difficuldades não possam ser facilmente vencidas.

36 — Mostremos agora qual a natureza do trabalho puramente intellectual que convém á elaboração directa de nossas construcções abstractas.

Antes, porém, de apreciar o trabalho da região intellectual, é necessario distinguirmos o *objectivo* do *subjectivo*, isto é, o que directamente se refere ao objecto contemplado, do que é relativo ao sujeito contemplador e pura construcção do seu cerebro. Este dualismo assignalado por Kant só foi

---

(4 c) Laffitte — Philosophie Première.

definitivamente formulado no seculo XVIII por David Hume nos seus *Ensaios sobre o Entendimento Humano*, embora Aristoteles tivesse já affirmado a grande verdade de que *tudo o que existe no cerebro provém de uma sensação exterior*.

O Mundo fornece, com effeito, ao nosso cerebro os materiaes para as suas construcções subjectivas, o excita, o alimenta e regula, fornecendo as impressões necessarias ao seu exercicio e ás suas emoções, e subordinando sua acção a uma ordem invariavel, que assiste ás creações destinadas a traduzil-a. Como o estomago, realiza o cerebro uma digestão de materiaes differentes: o primeiro recebe como alimento corpos de naturezas diversas, elabora-os e com os productos resultantes vivifica todo o organismo; o segundo recebe da contemplação do mundo exterior as mais variadas impressões que se transformam em idéas, e combinando-as de modos varios, chega ás suas verdadeiras construcções.

Isto posto, vejamos como se realiza o trabalho intellectual. Este compõe-se evidentemente de duas partes distinctas, a saber: a *concepção* e a *expressão*. A concepção comprehende o que chamamos *contemplação* e *meditação*; podendo a contemplação ser *concreta* ou *abstracta*, e a meditação ser *inductiva* ou *deductiva*: a intelligencia encerra assim cinco faculdades *distinctas*; *contemplação concreta*, *contemplacão abstracta*, *meditação inductiva*, *meditação deductiva* e *expressão*.

Estas faculdades, sob a inspiração e excitação da região affectiva, recebem, por intermedio dos sentidos, os materiaes fornecidos pelo meio em que vivemos e elabora-os formando as construcções que têm de dirigir, com assistencia do sentimento, a nossa actividade. A phase objectiva começa com a contemplação, emquanto que a subjectiva, tem lugar desde que principia a meditação. A primeira implica a existencia de um objecto para ser observado; a segunda póde ser feita independente delle, até mesmo na mais completa escuridão e no mais profundo silencio.

A imaginação reproduz as imagens e a memoria lembra a serie de acontecimentos realizados, de modo que o espirito tem sempre presentes esses auxiliares indispensaveis e poderosos para facilitar a sua elaboração e garantir a exactidão desta.

Uma vez obtidos os materiaes pela observação, esses factos ficam inteiramente independentes do mundo exterior, e só se acham subordinados ás leis que garantem a plena harmonia cerebral, necessaria a toda e qualquer concepção, como a todo e qualquer acto de nossa existencia.

Por exemplo, um objecto se nos apresenta ao espirito pelo conjunto de propriedades que nos são fornecidas pelos sentidos. Estas propriedades convenientemente combinadas compõem uma certa imagem, que é o resultado da contemplação concreta, onde o ser é apreciado em seu todo.

A imagem é assim construida por uma serie de sensações simples, causadas pelas impressões recebidas da côr, do peso, do som, da fórma, do volume, etc. sobre os centros correspondentes aos nervos sensitivos da visão, do tacto, da audição, etc. A contemplação concreta inicia, pois, a elaboração das nossas concepções, desde as mais bellas producções poeticas ao mais simples pensamento de architectura, desde a mais elementar elaboração mathematica até as mais transcendentes construcções moraes. A essa contemplação devem estar normalmente subordinadas todas as nossas idealizações para que ellas possam ter uma utilidade real; nella estão contidos os materiaes fundamentaes do trabalho cerebral.

Formada a imagem pela contemplação concreta, é claro que ella será tanto mais aproximada da realidade e tanto mais precisa e viva quanto mais energicas forem as aptidões individuaes.

Obtida assim uma imagem synthetica, começa então um novo trabalho cerebral que a decompõe nas noções simples que a constituem. Estas são apreciadas em suas propriedades particulares, e a *abstracção* principia assim a se desenvolver

na região da contemplação abstracta, elaborando os elementos que têm de servir de base á *construcção* geral.

A primeira phase do trabalho mental é, pois, essencialmente synthetica: o ser é ahi apreciado em seu todo. A segunda é, ao contrario, essencialmente analytica: procede por decomposição até chegar aos elementos fundamentaes que constituem o conjunto formado pela primeira operação cerebral. Esta differença capital torna a *contemplação concreta* muito mais propria ás Artes do que a contemplação abstracta, a qual pela sua aptidão analytica convem muito mais ás sciencias.

Com estas duas funcções ficam elaborados os materiaes abstractos; mas a verdadeira *abstracção* só principia quando começa a *inducção* porque só nesse momento a generalização exige a completa consideração das propriedades, independentemente do conjunto em que ellas se nos manifestam.

A *meditaçao inductiva*, terceira phase do trabalho cerebral, abrange o que ha de commum em uma classe ou em classes differentes dos seres que a contemplação concreta nos apresenta, formulando assim idéas geraes, verdadeiras abstracções, de que se tem de utilizar a nossa acção constructiva.

Por exemplo, todas as arvores, arbustos e hervas apresentam, por entre a variedade de suas fórmas e de suas dimensões, propriedades importantes que lhes são communs, taes como: a alimentação, o crescimento, a duração limitada, etc., com as quaes a meditação inductiva constróe um typo puramente ideal que se denomina *vegetal.*

Além disto, á meditação inductiva cabe ainda determinar as relações que ligam entre si dois phenomenos abstractos da mesma ou de differente natureza, e é esta precisamente a parte mais complicada de sua missão, e onde começa verdadeiramente o dominio scientifico.

Uma vez estabelecidas estas relações, a *meditação deductiva* vem completar a elaboração mental, tirando do facto todas as consequencias e leis que delle possam resultar. De-

duzir, diz Laffitte não é em ultima analyse mais que transformar, isto é separar explicitamente de uma cousa uma outra cousa que ahi se achava implicitamente contida: fazel-a destacar, estabelecel-a claramente, é proprio da deducção.

Mas existem, como dizia Aristoteles, certos processos que convenientemente empregados permittem chegar a tal resultado? De modo algum. «Deduzir é uma aptidão distincta e irreductivel do nosso cerebro, muito pouco desenvolvida entre a maior parte dos homens; o nome de methodo deductivo indica simplesmente o conjunto dos processos que nosso cerebro tem construido nos differentes casos que se lhe têm apresentado» (Pierre Laffitte — *Les grands types de l'Humanité.* — t. 1.º pg. 10).

40 — Estando assim construida em nosso cerebro a *concepção abstracta*, baseada sobre os materiaes objectivos, só nos resta indicar a ultima phase do trabalho intellectual, que consiste em traduzir esta concepção exteriormente, de modo a podel-a transmittir a outro cerebro e fixar por mais tempo a sua duração. Para isto existem as funcções de *expressão* (4 d), que nos facultam signaes proprios para traduzir os differentes estados em que se possa achar a nossa alma, facilitando assim novas abstracções, pela fixação das propriedades dos seres sobre os quaes a attenção se concentra, e permittindo novas concepções.

Devemos emfim observar que ha solidariedade em todo o conjunto cerebral, de sorte que a actividade da *região especulativa* é sempre influenciada pelo estado da *região affectiva* e reciprocamente. O mesmo se dando para com o *caracter*, a participação total do cerebro em todas as nossas construcções é, pois, evidente e necessaria.

Em resumo, ha sempre nas construcções cerebraes tres phases distinctas: Uma constituida pelo trabalho de observa-

---

(4 d) A respeito da expressão, veja-se o que foi dito nos *Apontamentos de Arithmetica (n.º 63 pag. 59 theoria da numeração).*

ção, que fornece as imagens; outra por uma operação cerebral em que estas imagens são apreciadas em suas partes componentes, ou em suas propriedades, e uma terceira em que esses resultados são traduzidos pela linguagem. A abstracção começa com a segunda, apreciando as relações que existem entre as noções abstractas, ás quaes podem afinal ser traduzidas exteriormente por meio da *linguagem*.

Sob o regimen fetichista, ou na infancia da nossa especie, o primeiro modo de realização do trabalho mental foi naturalmente o que mais se desenvolveu. Preoccupados com a observação dos seres, os fetichistas pouco attendiam aos phenomenos que nelles se manifestavam. Comprehende-se que taes disposições foram finalmente em extremo favoraveis á observação, ou á contemplação concreta. Os materiaes objectivos que deviam servir de base a todas as construcções posteriores ficaram assim elaborados; o emprego continuo e acurado da observação foi desenvolvendo o espirito humano até que, muito naturalmente, o levou á apreciação posterior dos phenomenos. Só então a Humanidade se pôde elevar ás construcções scientificas, que começaram na Grecia, onde pela primeira vez o immortal Thales formulou com precisão uma relação abstracta, instituindo assim a sciencia geometrica. Com os trabalhos gigantescos da civilização gréco-romana e os esforços da evolução catholico-feudal, formou-se no Occidente uma raça de elite, que conservou desde muitos seculos todos os elementos accumulados pelas gerações passadas.

Corrigindo os, desenvolvendo-os, e augmentando a valiosa herança, se construiu assim a base abstracta que hoje serve de guia á especie humana. «Pouco numerosos, esses bemfeitores da Humanidade são dignos da nossa eterna gratidão como tendo empregado todo o seu genio em esclarecer a nossa conducta, em poupar os nossos esforços e em livrar-nos dos preconceitos da ignorancia e dos prejuizos lamentaveis das superstições.»

§ 5.º

Concepção abstracta da extensão;
II. Theoria do espaço e dos typos geometricos

41 — A *abstracção* primordial em *geometria*, aquella que, para bem dizer, constitue o ponto de partida desta sciencia, consiste sem duvida em considerar a *extensão* separadamente das outras qualidades com as quaes se manifesta nos corpos. Mas, esta noção abstracta não basta por si só para dar uma idéa precisa da *extensão* e permittir apreciar as relações abstractas entre os seus elementos, quer se trate dos *volumes*, quer das *superficies* e mesmo das *linhas*. Ella exigiu, desde o inicio da sciencia geometrica, duas outras noções complementares, sem as quaes não poderia esta se desenvolver. Referimo-nos ás concepções do espaço e dos *typos geometricos*. A primeira surgiu espontaneamente com as primitivas especulações geometricas entre os Gregos, cujos compendios especiaes já a mencionavam, mesmo antes de Euclides.

Na celebre obra deste geometra, como nas anteriores (5 a), já o corpo era considerado como sendo *uma certa porção de espaço;* de sorte que a noção de *espaço* já figurava para representar a extensão dos corpos em *geometria*.

A segunda concepção, consequencia logica da precedente,

(5 a) De Hippocrates de Chios, Theaetetus de Athenas, Lion, Thendino de Magnesia, Hermotinio de Colophon e Eudoxus — discipulo de Theodosus de Cyrene e de Socrates, conforme diz Allman em sua obra «*Greek Geometry from Thales to Euclide.*»

APOLONIUS

consiste na instituição dos typos geometricos artificiaes, em virtude da impossibilidade de considerar todas as formas naturaes que os corpos nos apresentam. Mas deixemos por emquanto de parte esta concepção, e occupemo-nos especialmente da primeira.

42 — Para examinar detidamente a concepção do *espaço*, tal como se apresenta em *geometria*, devemos a principio observar que de ordinario ou passa ella despercebida, ou é mal apreciada quanto ao seu caracter. Effectivamente, antes de A. Comte, nenhum geometra assignalou a importancia capital desta instituição, e só elle o fez em 1819, conforme se vê no seu opusculo — «*Essais sur la Philosophie Mathématique*» — publicado nesse anno em Paris.

Notemos, em primeiro lugar, que definindo a extensão de um corpo pela *porção* de *espaço por elle occupado*, os geometras que o precederam não prestaram attenção ao caracter subjectivo da noção de espaço, que tão frequentemente utilizavam. Entretanto, este caracter é evidente, e resulta immediatamente da propria definição que adoptavam.

Com effeito, para admittir que o *espaço* considerado em *geometria* é o proprio meio fluido em que vivemos mergulhados, seria preciso suppor-lhe attributos que não possue realmente. Porque o meio objectivo não póde evidentemente guardar as fórmas dos corpos nelle mergulhados, de modo a permittir-nos raciocinar sobre esses moldes, independentemente dos mesmos corpos. Seria para isso necessario que o meio gasoso que nos cerca tivesse a propriedade de solidificar-se nos limites das superficies dos corpos nelle immersos. Além disto seria preciso que um tal meio fosse dotado de immobilidade e de uma constante densidade, emfim de propriedades mais uniformes do que aquellas que a realidade objectiva nos apresenta.

43 — O *espaço* considerado em *geometria* é pois uma concepção subjectiva, destinada a representar a *extensão* dos corpos, independentemente das outras qualidades que possuem.

E' portanto uma mera creação do espirito humano, a qual só existe realmente no nosso cerebro.

E' preciso, pois, neste caso como em qualquer outro, não confundir a realidade objectiva com a realidade subjectiva. Esta só existe no sujeito observador, ao passo que aquella se manifesta no objecto observado. Não são pois identicas, comquanto uma esteja sempre dependente da outra, segundo o principio que *subordina as nossas construcções subjectivas aos materiaes objectivos.*

Esta subordinação torna-se evidente na instituição geometrica do espaço, cujas propriedades resultam todas das que manifesta o meio objectivo, embora modificadas de modo a convirem aos raciocinios geometricos. Si por exemplo vivessemos num meio liquido, como vivem os peixes, é claro que a nossa concepção do espaço seria tambem a de um meio liquido, embora menos denso, afim de não oppôr nenhuma resistencia ás fórmas e movimentos que a elle referissemos.

Baseada sobre a existencia aerea, a nossa concepção do espaço não podia, pois, deixar de ser a de um meio gasoso, mais fluido que a nossa atmosphera, e susceptivel de modelar a fórma de qualquer corpo, tal como se observa no vestigio deixado por este sobre a areia.

Para o geometra, o espaço não é, pois, sinão um painel branco em que se desenham nitidamente as figuras que contempla: *é preciso vêr no Espaço*, dizia Monge. Naturalmente, para que as figuras desenhadas se destaquem do fundo branco do painel é preciso attribuir uma côr differente a todas as linhas que as limitam. Augusto Comte as suppunha de côr verde e Diderot imaginava que essas linhas eram formadas por pontos negros, como se deprehende deste trecho: «...ora para imaginar, é preciso colorir um fundo e destacar pontos desse fundo suppondo-lhes uma côr differente da que elle tem. Desde que se restitue a estes pontos. a mesma côr do fundo, no mesmo instante tudo se confunde, e a figura desapparece; pelo menos, é assim que as cousas se passam na minha imagina-

ção; e eu presumo que os outros não imaginam de modo differente de mim.

«Quando, pois, me proponho a perceber em minha cabeça uma linha recta, de outro modo que por suas propriedades, começo por desenhal-a no interior de minha tela branca, da qual destaco uma serie de pontos negros collocados na mesma direcção. Quanto mais as cores do fundo e dos pontos differem, tanto mais percebo os pontos distinctamente, e uma figura de uma côr muito vizinha da do fundo não me fatiga menos a considerar em minha imaginação que fóra de mim, e sobre uma tela.» (Diderot *in Lettres sur les aveugles).*

Por outro lado, torna-se evidente que não é necessario levar similhantes modificações da realidade além do que é sufficiente para as nossas especulações. Não ha, por exemplo, necessidade de conceber em *geometria* um espaço tão extenso quanto aquelle que se utiliza em *astronomia*, e ainda menos de concebel-o como indefinido, qual se nos afigura o meio objectivo. O estudo da constituição celeste não deve ir além dos astros do nosso systema planetario, como unicos verdadeiramente ligados aos nossos destinos. Os limites do nosso Mundo são, pois, os do nosso Espaço, cuja instituição subjectiva nos permitte estendel-o ou restringil-o, conforme as nossas necessidades.

Emfim, nada impede de conciliar os attributos geometricos e mecanicos com as outras qualidades physicas de que o Espaço pode ser successivamente dotado, posto que sejam ellas de ordinario afastadas em *mathematica* como estranhas ás especulações correspondentes. As propriedades que esta sciencia considera devendo ser referidas ao meio subjectivo permittem qualifical-a de *sciencia do Espaço*, do mesmo modo que se chama a *physica* de *sciencia da Terra*, e á *moral* de *sciencia da Humanidade.*

Para terminar estas considerações, passamos a transcrever o primeiro juizo que a respeito da concepção do espaço emittiu Augusto Comte, conforme se vê no opusculo acima citado.

E' mister conhecel-o, não só pela sua profundeza, como tambem para acompanhar a evolução do pensamento do grande Mestre, a este respeito.

«L'idée de l'espace, telle que les géomètres l'emploient, est une création éminemment philosophique de notre esprit, qui a surtout pour objet de nous permettre de considérer l'étendue d'une manière purement abstraite, ce qu'il eût été absolument impossible de faire sans cela. Celui qui a inventé l'espace doit être regardé comme le véritable fondateur de la Géométrie. Aussitôt qu'on a imaginé de rapporter l'étendue des corps à un espace distinct et indépendant de tout corps, on a pu considérer l'étendue séparément des corps, et en elle-même; parce qu'on pouvait ôter le corps sans que l'étendue disparût, puisque *l'espace* restait: cette invention-lá est vraiment sublime. Il est assez probable, on peut même dire il est certain, que la nature a fourni les premiers éléments de cette idée; ainsi l'impression laissée par le pied d'un homme sur le sable qu'il vient de quitter, l'empreinte plus ou moins profonde laissée par un corps dur qui tombe sur un corps mou, comme la cire, l'argile, etc., etc., sont tout autant de moyens que la nature fournit à notre imagination pour nous représenter *de la place* sans aucun corps qui l'occupe. Il est plus que probable qu'on a commencé par là, et qu'on s'est figuré des espaces de cire, ou d'argile, ou de sable, etc.; dans tous les cas, il est bien clair que ce n'est pas brusquement, mais successivement qu'on est parvenu á se représenter l'espace tel que nous l'employons aujourd'hui dans nos raisonnements géométriques, et que cette idée-là, comme toutes nos idées philosophiques et autres, s'est perfectionnée par degrés avant d'arriver á son état actuel.

Nous jouissons bien de la faculté de nous représenter des sensations nouvelles que nous formons en combinant nos sensations réelles, et les atténuant ou les exagérant, mais notre imagination ne va jamais plus loin que cela, nos sensations sont toujours la base et les matériaux de ses élaborations. Ainsi, il est bien évident que nous ne saurions nous figurer

jamais l'espace comme absolument incorporel, ce serait une rêverie métaphysique de le penser, mais nous nous le figurons comme le moins corporel qu'il soit possible, et nous sommes effectivement parvenus graduellement á nous le représenter si peu corporel que sa matérialité a pu être mise en question parmi nous. Quelle est, au fond, la condition à remplir, quel est le but à atteindre, dans la formation de cette idée d'espace? C'est d'arriver à nous le figurer assez peu corporel pour que la portion d'idée de corps qui y reste ne puisse pas affecter nos raisonnements, tout en lui laissant cependant assez de matérialité pour que cette idée ne soit point fugitive, pour que notre imagination puisse la saisir et la suivre sans trop de peine. Voilà, au fond, en quoi tout cela consiste: telle est la vraie manière de considérer cette notion de l'espace, qui, entre les mains des métaphysiciens, a engendré tant de questions creuses, inintelligibles, absurdes et ridicules. J'observe même qu'il n'est nullement nécessaire que l'idée que nous nous formons de l'espace soit invariable et absolue; elle est suffisamment ce qu'elle doit être toutes les fois qu'elle remplit ausssi complétement qu'il est nécessaire ces deux conditions que j'ai posées tout à l'heure. Mais ce point n'est pas tellement fixe, de sa nature, qu'il ne puisse varier en plus et en moins, entre certaines limites. Aussi, de fait, nous faisons varier plus d'une fois l'idée de l'espace sans qu'il en résulte aucun inconvénient.

Par exemple, l'astronome qui contemple dans son imagination l'ensemble du système planétaire, et le géomètre qui combine des intersections de surfaces et de lignes pour résoudre quelque question de géométrie descriptive, n'ont pas, à coup sûr, la même idée de l'espace, et ils n'ont besoin de l'avoir. Pour ce dernier, il lui suffira de se représenter l'espace comme une certaine portion de l'atmosphère qui ne s'étend pas plus loin que les limites des étendues qu'il veut combiner; mais le premier devra se figurer l'espace d'abord comme étant infiniment plus vaste, et ensuite comme composé

d'une matière infiniment moins dense que notre air atmosphérique. En un mot, il est bien certain que nous nous figurons l'espace tantôt comme très-vaste, tantôt comme très-rétréci, ou, si l'on veut (et cela revient absolument au même) que nous en considérons tour á tour des portions plus ou moins grandes; et, de plus, nous ne le concevons pas non plus comme gardant toujours la même densité. A la vérité, nous le voyons toujours comme un gaz, car, au fait, en y réfléchissant, il me semble qu'un espace d'air est tout ce qu'il y a de plus naturel, et l'est davantage que ceux dont je parlais tout à l'heure, donc je crois, contre ce que j'ai avancé plus haut, qu'on a dû se figurer l'espace primitivement comme de l'air, et c'est aussi ce que nous faisons journellement; seulement nous abstrayons de l'air toutes ses autres propriétés physiques, chimiques et physiologiques, et, en second lieu, nous, lui attribuons souvent des densités plus on moins inférieures à celle de l'air atmosphérique. Mais si quelqu'un me disait qu'il se représente l'espace plus subtilement encore que sous la forme d'un gaz répandu partout, et extrêmement raréfié, je lui demanderais comment il se le figure: pour moi, j'avoue que je ne saurais en venir à bout. Ainsi donc, au lieu de ces discussions aussi vaines qu'absurdes des métaphysiciens sur l'espace, je mets cette idée philosophique: l'espace est une création de notre imagination, dont notre esprit se sert pour abstraire l'étendue. On voit alors ce que signifient toutes les questions sur la matérialité de l'espace, etc. On voit aussi la singulière commodité de cette idée, car, pourvu que nous ne perdions jamais de vue que ce n'est simplement qu'une création de notre intelligence, nous pourrons d'ailleurs douer l'espace de toutes les propriétés qu'il nous plaira, de toutes celles qu'il pourra être utile de lui attribuer pour faciliter nos recherches et nos raisonnements. C'est ainsi, par exemple, que les géomètres, quand ils veulent établir la théorie générale des mouvements, considèrent l'espace comme immobile, afin d'avoir un terme fixe de comparaison pour tous les mouvements qu'ils

voudront considérer. On pourrait aussi le supposer en mouvement, si on y trouvait quelque commodité; et, de même, on pourrait le supposer coloré, odorant, etc., si cela servait à quelque chose: la nature de cette idée comporte à cet égard une extrême latitude. L'espace est donc, en un mot, la trace, l'empreinte de tous les corps, réalisée dans notre esprit par une création de notre imagination. La condition qu'il faut remplir pour qu'il serve à nos raisonnements, c'est de le concevoir comme éminemment pénétrable, afin qu'il puisse conserver toutes ces empreintes sans se déformer. Pour que les formes une fois empreintes dans cet espace puissent être conçues comme fixes, pour que notre imagination puisse les suivre, on conçoit comme solidifiées les parties de l'espace dont on veut fixer la forme, ou, au moins, les limites de ces parties.

Quand nous voulons suivre dans l'espace un raisonnement quelconque sur des lignes ou sur des surfaces, ou sur des volumes, si nous ne nous figurions pas comme solides les étendues que nous considérons, ou, au moins, les limites de ces étendues, nos images ne seraient point circonscrites, elles s'évanouiraient bientôt, et nous serions dans l'impossibilité de suivre les raisonnements. Nous nous figurons donc l'espace, en général, comme gazeux, et les parties de l'espace que nous voulons considérer séparément comme solides. Il est assez probable que si, au lieu de vivre dans l'air, comme nous y vivons, nous eussions vécu dans l'eau comme les poissons, nous aurions conçu l'espace comme liquide, au lieu de le concevoir comme gazeux. L'espace des poissons, c'est la mer, si les poissons avaient un espace.

Quant á l'espace conçu comme absolument vide de matière, je le renvoie aux métaphysiciens, que se chargeront de se le représenter, s'ils peuvent: pour moi, j'avoue que j'en suis incapable. Le fameux adage: *la nature a l'horreur du vide*, est une expression extrêmement vicieuse d'une idée qui est, au fond, parfaitement juste, et qui n'aurait jamais conduit à des absurdités, si elle eût été bien énoncée, et qu'on n'en eût pas

fait de fausses applications. Ce n'est pas la nature qui a horreur du vide, puisqu'elle nous le présente partout, c'est notre esprit qui ne saurait le concevoir, et qui tend toujours à le combler. Quoi qu'on dise et qu'on fasse, quoi que les expériences nous fassent connaître, je défie aucun homme, dans son bon sens, de parvenir à se figurer un vide réel et absolu.

Quand nous voyons un espace où il n'y a ni solide, ni liquide, nous y supposons tout naturellement de l'air, ou quelque autre gaz.

Quand la physique nous a démontré que dans le vide de Torricelli, ou dans celui de la machine pneumatique, il n'y a plus même d'air, ni d'autre gaz (au moins que nous pouvons le concevoir ainsi par analogie, par extension, car, de fait, il y reste toujours quelque chose, soit gaz, soit vapeurs aqueuses), nous sommes obligés de nous y figurer quelque autre fluide plus subtil encore, sans quoi notre imagination ne saurait se le représenter. Et cela, par la raison que notre imagination empruntant toujours à nos sensations tous ses matériaux, peut bien parvenir graduellement á se figurer une étendue de moins en moins remplie de matière, mais ne saurait jamais atteindre la limite, et se la représenter absolument vide de tout corps.

D'ailleurs, je le répète, toute cette discussion précédente n'est que pour fixer et préciser une idée, car, du reste, tout cela ne fait absolument rien quant au parti que nous tirons de cette conception de l'espace. Car, que nous puissions le voir comme absolument vide, ou que nous ne le puissions pas, c'est fort indifférent à la science, attendu que, d'une part, il n'est nullement nécessaire pour nos raisonnements de contempler l'espace comme entièrement vide, mais seulement comme très-fluide, et que, d'une autre part, dans tous nos raisonnements nous ne faisons nullement attention à la matérialité de l'espace, qu'elle n'est là que pour que notre imagination puisse se le figurer, et que, par conséquent, nous raisonnons absolument de même que si nous le concevions tout à fait vide.»

44 — Ligando mais tarde a concepção subjectiva do espaço

ao conjunto de sua doutrina, o Fundador do Positivismo generalizou-a e systematizou-a, dando-lhe um maior alcance philosophico, e até um caracter poetico. O espaço havia servido á mathematica para representar as fórmas e os movimentos; nada impedia que servisse tambem ás outras sciencias para representar os respectivos phenomenos. O espaço, que guarda as imagens mais complicadas da *geometria*, póde evidentemente guardar tambem todas as imagens mais particulares, isto é aquellas que correspondem aos attributos naturaes que podemos abstractamente separar dos corpos.

Mas, o grande espirito de A. Comte não se detem ahi, visto como esta concepção se desenvolve e engrandecê ainda. Na *introducção* de sua *Synthese Subjectiva*, publicada em 1857, estabelecendo o dualismo do entendimento humano, em *razão abstracta* ou coordenação das leis dos phenomenos, e em *razão concreta* ou consideração dos attributos dos seres, elle systematiza emfim a concepção do *espaço* com uma plenitude digna de seu genio. O *espaço* é então representado como a séde de todas as nossas abstracções, isto é do conjunto das relações abstractas ou leis fataes que dominam a nossa existencia. A palavra *destino* pela qual toda a antiguidade designou o Ser superior aos deuses, e cuja unica missão era impor um limite ao poder divino, pode passar a exprimir o conjunto destas fatalidades constituidas pelas leis naturaes que nos são conhecidas, ficando a palavra *acaso* para qualificar as desconhecidas. (5 b)

45 -- Os typos geometricos artificiaes de que agora deve-

(5 b) E' sabido que os fetichistas attribuiam vida a todos os seres, mesmo inorganicos. Incorporando o fetichismo ao positivismo, A. Comte concebeu a trindade positiva formada pela Humanidade ou o Grande-Ser, a Terra ou o Grande-Fetiche, e o Espaço ou Grande-Meio: a Humanidade vivendo da Terra que se compraz em servil-a, com a assistencia constante do Espaço que guarda benevolo através dos tempos as relações abstractas que ligam os acontecimentos. Basta lêr attentamente a obra citada, para comprehender o alto valor moral desta poetica ficção. A mais antiga instituição abstracta da Humanidade foi assim consolidada e desenvolvida pelo Positivismo que estendeu e systematizou seu dominio scientifico; elle imprimiu-lhe uma alta efficacia poetica e lhe deu emfim um alto destino moral.

mos nos occupar foram tambem instituidos desde as primeiras investigações abstractas sobre a medida da extensão.

E' evidente que a Geometria não se poderia propôr o estudo directo de todas as fórmas que o Mundo nos apresenta. A multiplicidade e irregularidade infinita de similhantes figuras impossibilitariam um tal estudo, que, além disto, não poderia jamais permittir as previsões que caracterizam qualquer sciencia.

Eis porque o espirito humano se limitou a tirar do mundo exterior a linha recta, o circulo, bem como a superficie plana, e a combinar estas fórmas de todos os modos possiveis. Chegou assim, como vimos, a uma serie de typos geometricos perfeitamente definidos, cujo estudo, nos casos mais simples, foi o objecto principal da primeira evolução da *geometria* na Grecia. Successivamente combinadas pela imaginação dos geometras, esses typos artificiaes produziram por seu turno muitos outros que foram apreciados na segunda evolução da *geometria* grega. Continuando nesta direcção, poderia o espirito humano multiplicar indefinidamente os typos artificiaes da *geometria antiga*. Mas, com o advento da *geometria moderna*, a creação de novos typos tornou-se tão simples que *jamais se poderá conquistar a immortabilidade pela invenção de uma nova curva* (5 c). Além disso os typos constituidos pela *geometria antiga* bastam plenamente ao conjunto de nossas necessidades. O invento de novos typos pela *geometria moderna*, reduzido como veremos ao de simples *equações*, não nos traria outras vantagens. E' bastante conceber similhante possibilidade para tirar della todos os proveitos logicos, a proposito da relatividade de nossas concepções.

A creação dos typos artificiaes deve pois ser systematizada e reduzida o quanto baste ao seu destino normal. Estes estudos especiaes só devem, pois, ser mantidos tendo em vista a

---

(5 c) Como aconteceu na antiguidade em que Nicomedes se celebrizou pela invenção da *con hoid:*; Diocles pela da *cissoide*, etc.

reacção geral que exercem sobre a resolução theorica e a applicação pratica das principaes questões geometricas, conforme já indicámos.

46 — Não se deve entretanto desconhecer a immensa utilidade da primitiva instituição dos typos geometricos artificiaes. Em primeiro lugar, a simplicidade delles permittiu o seu estudo abstracto, animando assim a cultura geometrica, e facilitando a sua extensão a outros typos.

Uma vez estudados nos casos mais simples, a sua applicação tornou-se logo possivel, sendo notavel a coincidencia de alguns typos naturaes com os artificiaes anteriormente creados (5 d).

Para os casos mais complexos, isto é para as figuras não consideradas em *geometria*, o espirito humano foi naturalmente levado a assimilal-as aos typos artificiaes, decompondo-as em seus elementos, e apreciando-os separadamente, para depois, por um trabalho de synthese, recompol-as de novo e medir o seu conjunto.

Esta marcha resulta espontaneamente da lei logica que nos conduz por toda a parte a reduzir os casos complicados a outros mais simples. Applicada ao circulo, ella levou o grande Archimedes a assimilal-o a um polygono regular de um numero infinito de lados infinitamente pequenos.

Estendido mais tarde a outras curvas bem como ás superficies, similhante methodo conduziu a decompol-as em seus elementos infinitesimaes, cuja apreciação abstracta e numerica deu lugar á creação da *geometria transcendente*, que já nos tempos modernos veio completar a constituição primitiva da *geometria*.

50 — Importa finalmente reconhecer que a instituição dos typos geometricos contribuiu poderosamente para a fundação da *geometria moderna*.

(5 d) A mineralogia nos offerece varios exemplos disto: muitos corpos se crystalizam sob a fórma dos polyedros que a *geometria* instituiu artificialmente.

Estudando, com effeito, os typos artificiaes, puderam os geometras aproximal-os e comparal-os, sendo assim impellidos a tornar suas soluções tão geraes quanto os seus problemas.

Uma vez referida ao seu principal destino, a sciencia da extensão trata, com effeito, de questões necessariamente uniformes para todas as figuras que considera. O mesmo dá-se essencialmente, embora em menor grau, em relação ao estudo preparatorio das propriedades caracteristicas de cada typo considerado. Porque na maior parte dessas especulações auxiliares as diversas linhas e superficies apenas são realmente distinguidas por modificações particulares de alguns attributos geraes. Ora, afastando as especulações ociosas, não se encontra ahi senão um pequeno numero de casos em que se deve normalmente estudar para certos typos theorias naturalmente desprovidas de interesse a respeito de todos os outros. Successivamente desenvolvida, á medida que os typos se multiplicam, esta uniformidade espontanea das questões geometricas faz logo desejar uma equivalente similhança entre as elaborações correspondentes. Tal foi o objecto da reforma geometrica operada por Descartes. Com effeito, uma tal renovação consiste essencialmente em tratar de modo uniforme os diversos casos de um mesmo problema para todas as figuras possiveis. «Esta constituição normal do dominio geometrico veio assim coordenar, em relação ao sujeito, uma sciencia até então subordinada aos objectos (5 e).» Ella fez assim surgir dos mais simples phenomenos o primeiro typo e grao da regeneração que A. Comte devia realizar para todos os estudos reaes, fazendo systematicamente prevalecer a subjectividade sobre a objectividade, para substituir o relativo ao absoluto.

Sendo certo que a introducção dos typos artificiaes contribuiu directamente para o advento da *geometria geral*, tor-

5 e) A. Comte: Synthese Subjective.

na-se emfim evidente que a Instituição do *Espaço* é a base essencial de toda a sciencia geometrica. Porque a creação dos typos artificiaes é incontestavelmente fundada sobre a instituição do Espaço: na verdade si as imagens geometricas ficassem ligadas aos corpos correspondentes, as figuras subjectivas não poderiam ordinariamente differir das fórmas objectivas. Portanto foi sob a assistencia continua do Espaço que a *geometria* pôde directamente considerar os typos artificiaes, cuja aproximação a impelliu a tornar suas soluções tão geraes quanto os seus problemas. Vê-se assim surgir certa connexidade entre o advento da instituição do Espaço e o da *geemetria geral*, que constituem os dois termos extremos da evolução preliminar do principal elemento mathematico. No paragrapho seguinte apreciaremos resumidamente esta evolução.

---

§ 6.º

Resumo historico da evolução preliminar da Geometria

51 — De um modo geral, temos apreciado até aqui as noções abstractas que prepararam o advento da sciencia geometrica, e mais especialmente a sua base logica constituida, como vimos, pela concepção do Espaço. Mas, esta apreciação não ficaria completa si não indicassemos, ainda que summariamente, as condições sociaes que solicitaram e permittiram a creação e o desenvolvimento da *geometria*. Similhante explicação é tanto mais necessaria quanto é certo que o apparecimento de uma sciencia não póde ser um facto isolado na historia da Humanidade, mas é, ao contrario, a resultante de uma serie de condições sociaes no conjunto do movimento humano.

Para nos convencermos de similhante verdade, basta por exemplo considerar que a sciencia da extensão teria attingido muito cedo o seu estado definitivo si os povos do Occidente, justamente preoccupados com a reorganização social, tivessem podido desenvolver na idade media a cultura geometrica legada pelos gregos. Os trabalhos realizados por estes teriam evidentemente bastado para fazer surgir a *algebra*, e desde então todo o resto do dominio geometrico. Taes condições, porém, não se realizaram, e por outro lado a situação social dos orientaes, herdeiros directos da sciencia grega, não lhes permittia similhante passo.

«E' impossivel julgar e mesmo comprehender a evolução mathematica isolando-a do conjunto da preparação humana.

DESCARTES

Sómente guiados pela philosophia da historia, podemos sufficientemente explicar a lentidão do surto geometrico, em virtude de sua ligação necessaria com todo o movimento intellectual e mesmo social. Devemos sobre tudo referir a esta connexidade o tardio advento da *geometria geral*, em lugar de referil-o a motivos puramente mathematicos. Abstracção feita das influencias sociaes, um tal retardamento torna-se inexplicavel quando se tem sufficientemente apreciado as condições intellectuaes desta renovação. Nada impedia aos antigos de representar por equações, não sómente a linha recta e o circulo, mas tambem as principaes curvas que estudaram. Um exame attento prova mesmo que elles haviam espontaneamente formado as equações especiaes da parabola, da ellipse e da hyperbole, facilmente deduzidas das suas definições conicas. Si de outro lado a algebra não se desenvolveu mais rapidamente, é preciso attribuil-o não á difficuldade de um tal surto, mas á ausencia de um impulso capaz de ligal-o ao conjunto das necessidades humanas.» (A. Comte — *Synthèse subjective*, chap. III, pag. 270 à 274).

Vejamos agora quaes foram as exigencias sociaes, que determinaram a instituição da sciencia geometrica.

52 — Em primeiro lugar, importa reconhecer que a *geometria* não poderia apparecer antes do advento da vida sedentaria. Conforme indica seu nome, foi ella destinada á medida dos terrenos, e é evidente que a vida nômada da primeira infancia da nossa especie não podia exigir taes medidas.

Sómente quando os povos se estabeleceram em pontos fixos é que surgiu a necessidade de apropriar as terras e com ella a de medil-as.

Dizem os historiadores gregos que foi o vetusto Egypto o berço da *geometria*. Narram que as inundações periodicas do Nilo obrigavam os egypcios a renovar constantemente as linhas divisorias de suas propriedades marginaes, e que assim se exercitaram na medida da extensão.

Si é certo que a prioridade do invento pertence a este po-

vo, é preciso accrescentar que as necessidades religiosas contribuiram poderosamente para desenvolver os conhecimentos geometricos. As exquisitas esphinges bem como os majestosos obeliscos e as monumentaes pyramides erigidas pela antiga theocracia nos attestam ainda hoje esta verdade.

«Entretanto, mesmo que não nos louvemos nestes autores, impossivel é duvidar que desde tempos remotos houvessem os homens procurado processos para medir e partilhar suas terras. Querendo depois aperfeiçoar taes processos, as investigações particulares conduziram pouco a pouco a investigações geraes. Por fim tendo intentado conhecer a relação exacta de toda a sorte de grandezas, formaram uma sciencia com um objecto muito mais vasto que o proposto a principio, á qual, entretanto, conservaram o nome que primitivamente lhe tinham dado.» (Clairaut, *Elementos de Geometria*, prefacio).

53 — Sem hesitação póde-se affirmar que a primitiva *geometria* compunha-se apenas de um conjunto de regras particulares, especialmente relativas a cada caso em que se applicava esta arte rudimentar de medir as terras.

E' o que se deprehende facilmente de uma dupla apreciação a *priori* e a *posteriori* a respeito do caracter mental e social de taes especulações.

A *priori*, é evidente que assim devia ser porque todas as nossas concepções são necessariamente concretas antes que se possam tornar abstractas. E' o que vimos no § anteprecedente quando ahi apreciámos a acção combinada das funcções intellectuaes para todo e qualquer trabalho mental Ora, a evolução intellectual de cada individuo reproduz a da especie, e, por conseguinte, as primitivas noções geometricas foram concretas e só mais tarde se tornaram abstractas.

A *posteriori* verifica-se tambem a mesma circunstancia. A historia das antigas theocracias nos mostra, com effeito, que similhante regimen não comportava essencialmente especulações abstractas desta natureza. Em virtude de sua simplicidade, sómente as noções numericas, espontaneamente

instituidas desde o fetichismo, puderam ser apreciadas abstractamente no periodo theocratico. Sabe-se que neste regimen a casta sacerdotal governante concentrava fortemente os dois poderes, temporal e espiritual, de sorte que não havia propriamente uma classe especial de intellectuaes, e as preocupações praticas não permittiam que a dominante se occupassse com especulações abstractas.

54—Cabe á Grecia antiga a gloria incontestavel de haver iniciado esta sorte de especulações. Depois de uma serie de lutas intestinas, aliás inevitaveis sob uma civilização militar, estabeleceu-se entre os diversos estados gregos um equilibrio politico que lhes assegurou a paz, e a expansão territorial em diversas colonias, desde logo fundadas na Asia Menor, na Sicilia, etc.

A favoravel posição geographica desta nação, as suas constantes relações com a theocracia Egypcia e outros povos, e sobre-tudo a situação social em que ficaram os gregos, desde logo impossibilitados de conquistas militares, eis os factores que mais contribuiram para desenvolver ahi a cultura intellectual, a principio esthetica, depois philosophica e scientifica.

As instituições civis e religiosas deste povo excepcional permittiram e toleraram a constituição de uma classe contemplativa, que pôde desenvolver e systematizar os conhecimentos já adquiridos pelos fetichistas, bem como aquelles que os theocratas haviam applicado.

«A actividade, a intelligencia e a sociabilidade, que o genio da guerra havia desenvolvido nessas populações, acharam um mais nobre emprego na cultura das bellas artes, da philosophia e da sciencia. Não podendo ser conquistadores, os homens de genio fizeram-se poetas, esculptores e sabios; e só em circunstancias graves, como a das *guerras medas*, revivia nestes pensadores o caracter desapparecido dos guerreiros.»

Por toda a parte onde se falava a lingua grega diffundiu-se a cultura artistica e a philosophica, aquella nascida na mãe patria e esta nas colonias mais importantes onde era maior a

liberdade espiritual. Emfim, quando ao estudo da *philsophia* se seguiu o das sciencias especiaes, a cidade de Alexandria tornou-se para estas o que Athenas havia sido para as artes. A escola de Alexandria, fundada pelos Ptolomeus, ficou sendo então o verdadeiro centro da sciencia antiga e ahi professavam diversos sabios da Grecia.

O povo grego foi assim sacrificado, servindo de pedestal a um pequeno numero de homens de genio que realizavam o seu destino, sendo obrigado a collocar a intelligencia acima da actividade. Dahi resultou sua degradação; pois que sendo incapaz em seu conjunto de apreciar o justo valor das concepções que surgiam, deixou-se levar pelas mediocridades barulhentas, acabando por dar sómente apreço ao talento da palavra e por collocar a *expressão* acima do *pensamento*. Si a conquista romana, como observa A. Comte, não chegasse a tempo, todas as cidades gregas teriam caido finalmente sob a vil tyrannia de algum rhetorico. Este povo foi, pois, sacrificado ao resto da humanidade, e lhe devemos por isto nosso respeito e gratidão.

Note-se ainda que a evolução intellectual, que teve por séde a Grecia, não constitue um facto isolado no movimento humano. Ella forma o inicio da evolução geral do Occidente, que se compõe de tres phases distinctas, seguidas de um periodo revolucionario que acabou de preparar o regimen final que convem á Humanidade. A primeira phase é constituida por uma evolução *intellectual*, isto é pela evolução *grega* que acabamos de indicar; a segunda por uma evolução *social*, que é o periodo *romano*, e a terceira por uma evolução *sentimental*, que é o regimen *catholico feudal*.

Estas tres evoluções successivas foram seguidas de um periodo puramente revolucionario, que começou no seculo XIV com a dissolução do regimen catholico, e que só devia persistir até a data em que A. Comte fechou a era das syntheses provisorias, constituindo uma synthese completa e definitiva.

Restringindo a nossa apreciação á evolução intellectual da

Grecia, devemos accrescentar que similhante evolução comprehende tres phases distinctas: a primeira esthetica, a segunda philosophica, e a terceira scientifica.

A phase esthetica precedeu e preparou naturalmente as duas outras. Os antigos costumes theocraticos não podiam permittir que se desenvolvessem logo a philosophia e a sciencia, cujo livre exame iria necessariamente aprofundar e ferir os dogmas ainda em vigor (6 a). Esta phase esthetica é essencialmente representada por Homero, tendo como adjunctos Eschylo, Phidias e Aristophanes.

A phase philosophica é principalmente representada por Aristoteles, o principe eterno dos grandes philosophos. Ao lado de seu nome, devem ser citados os de Thales, Pythagoras e ainda os de Socrates e Platão, que foi seu mestre.

Thales com a sua escola representa o passo inicial da philosophia grega, em que o espirito humano se esforça pela primeira vez para construir uma synthese objectiva e abstracta com os primeiros resultados da observação nascente. Antes de nenhum outro, elle attribuiu a leis naturaes a existencia dos phenomenos até então suppostos dependentes da vontade dos deuses. A elle devemos, com effeito, as duas mais antigas leis abstractas: essas leis são geometricas, e já tivemos occasião de cital-as nos *Apontamentos de Algebra*. Ellas formam por assim dizer o passo inicial da sciencia geometrica, e por esse

---

(6 a) A principio o movimento philosophico foi sómente realizado nas colonias gregas do mar Egeo, porque alli havia mais liberdade de pensamento. Nada mais natural de que esta desconfiança dos philosophos por Athenas e pelas velhas cidades da mãe patria ainda collocadas sob o jugo theocratico Os artistas eram ali protegidos, mas quanto aos philosophos, é preciso não esquecer que mais de um seculo depois de Thales ainda se votaram leis para banir Anaxagoras culpado de atheismo, para fazer matar Socrates, e exilar Aristoteles, accusado e convencido de impiedade. Sómente mais tarde, quando as colonias jonicas cairam sob a dominação dos Persas, é que a situação mudou e o movimento philosophico foi se afastando das colonias e se aproximando de Athenas. A philosophia achou emfim na cidade de Pericles o asylo que a sciencia devia encontrar mais tarde na capital dos Ptolomeus. Si Thales se estabelecesse em Athenas, a sua escola philosophica não teria dado talvez os sete sabios de que se ufanava a Grécia.

Installando em Mileto a sua escola, elle foi cercado da sympathia do povo que o fez até governador de sua cidade natal, onde era antes um simples negociante.

motivo é a Thales que se attribue mui justamente a fundação da *geometria*.

Thales estabeleceu em Mileto a sua escola philosophica, chamada Jonica, que teve por discipulos Anaximandre, Anaximenes, Heraclito de Epheso, Empédocles d'Agrigento, Anaxogora, Lucippe d'Abdére, Democrito e o historiador Herodoto, que representam a brilhante estréa da philosophia grega. Depois delle deve-se a Pythagoras e a seus discipulos a primeira tentativa para a creação de um poder espiritual independente do temporal. Emfim, depois dos philosophos de Mileto e Cretona devem ser lembrados os nomes de Socrates e Platão, os quaes embora menos eminentes tiveram comtudo o merito de preparar a transição do regimen polytheico para o monotheico, idealizado por Aristoteles e que devia prevalecer com o Catholicismo.

A phase scientifica da evolução grega é sobretudo representada por Archimedes, brilhante genio de mathematico e physico. Ao lado de seu nome devem ser lembrados os de Hippocrates, pai da medicina, Appollonius, celebre geometra, Hipparco, o maior astronomo da antiguidade, e o de Plinio-o-antigo, notavel erudito.

Afinal os resultados da evolução da mentalidade grega foram assimilados pelos Romanos. Conquistando a Grecia, elles os apropriaram e propagaram por todo o mundo antigo. Depois, emquanto o regimen catholico-feudal se occupava exclusivamente da reorganização social do Occidente, o thesouro intellectual era guardado no Oriente, de onde devia voltar mais tarde para ser completado e receber, emfim, nos tempos modernos, a systematização definitiva.

55 — A evolução philosophica da antiguidade que começou na Grecia com Thales de Mileto (639-548 A. C.) comprehende o estudo abstracto da *geometria*, da *astronomia*, dos mais simples phenomenos *physicos* e *biologicos*, procurando mesmo dar á *moral*, até então theologica, um caracter mais positivo. Pelos motivos que citámos, este movimento intellectual teve

inicio na Jcnia; onde Thales de Mileto, fundou então a sua escola philosophica. Appareceu ahi a geometria abstracta: Estudando-a sob este aspecto, Thales descobriu que qualquer angulo incripto num semicirculo é sempre recto (6-b) e esta proposição em virtude do modo de pensar dos antigos, suppõe conhecido o importante theorema que a *somma dos angulos de um triangulo é sempre igual a dois angulos rectos.* Vê-se com effeito, por Euclides (livro III, proposições 20, 21 e 35) como se demonstrava esta proposição. A demonstração usual, por meio da medida dos angulos, é dos modernos, provavelmente de Bertrand de Genève. A demonstração citada por Euclides apoia-se em que *o angulo exterior a um triangulo é igual a somma dos dois interiores oppostos*, donde resulta immediatamente o theorema que a *somma dos angulos de um triangulo é igual a dois rectos.*

Pode-se, pois, definitivamente olhar Thales, não só como tendo conhecido este theorema, mas tambem como o tendo descoberto, por isso que não existe antes delle nenhum vestigio de elaboração geometrica abstracta. E' portanto justo que se dê o seu nome a esta proposição. Thales descobriu igualmente que *os triangulos equiangulos tem os lados homologos proporcionaes*, o que permitte consideral-o tambem como o fundador da theoria dos *triangulos simillhantes.* A. Comte designava pelo nome de theoremas de Thales essas duas proposições, que por si só bastariam para fundar toda a sciencia da extensão.

Thales instituiu assim a *geometria das linhas*, a *geometria* verdadeiramente abstracta. E' esta uma das revoluções mais

---

(6 b) Esta importante propriedade é citada por Dante:

«O se del mezzo cerchio fai si puote
Triangol si, ch'un retto non averse.»
Par. C. XIII (101)

E' entretanto lamentavel que o grande Poeta Florentino que tantas vezes se refere a Euclides, não mencione o glorioso nome do fundador da geometria abstracta.

importantes do espirito humano, isto é, o estabelecimento da *sciencia abstracta*, que não poderia consistir em simples noções numericas, communs a todos os povos antigos e decerto insufficientes.

Foram pois os gregos que fundaram a sciencia abstracta, e foi Thales quem primeiro se occupou desta incomparavel creação. Os theocratas só conheciam, com effeito, a *geometria das superficies*, apenas reduzida a simples quadraturas obtidas empiricamente; ao passo que Thales introduziu a verdadeira *geometria* que consiste em estabelecer relações precisas entre os diversos elementos de uma figura, de maneira a poder determinar rigorosamente um delles por meio dos outros.

Além disso, e este foi um serviço consideravel, elle fez penetrar na logica humana por intermedio de seus dois theoremas a dupla idéa de *equação* e de *proporção*. Estas duas noções, e principalmente a segunda, aperfeiçoadas pelos philosophos da escola de Pythagoras, tornaram-se entre suas mãos processos abstractos de deducção, como o mostra claramente o decimo livro de Euclides (6 c). Não se possuia antes de Thales nenhum exemplo da passagem do abstracto ao concreto, da theoria á pratica. Apoiando-se sobre o seu segundo theorema, o da proporcionalidade dos lados dos triangulos equiangulos, refere a historia que elle mediu a altura das pyramides por meio de sua sombra, com grande admiração dos sacerdotes Egypcios que não conheciam a *geometria das linhas*.

Emfim, por seu duplo theorema, o fundador da *geometria antiga* foi o primeiro que forneceu a importante noção de *lei* abstracta, sob as suas duas formas essenciaes, embora similhante distincção só fosse muito mais tarde percebida por Cabanis e systematizada por A. Comte.

As descobertas geometricas de Thales e dos seus discipu-

(6 c) Laffite. Les grands types de l'Humanité. Vol. II.

los desenvolveram-se sobretudo na instituição da verdadeira *astronomia* abstracta e scientifica, que apparece então entre os gregos para substituir-se á *astronomia* theocratica, concreta e empirica dos seus antepassados. Thales foi ainda o iniciador desta grande revolução, preparando assim com a sua escola os elementos que deviam mais tarde servir de base aos trabalhos astronomicos de Eudoxio, do grande Hipparco, etc. E' pelo menos o que se deprehende do que diz o seu historiador Diogenes Laërce, e da inscripção collocada sobre o seu tumulo: «Tão pequeno é o sepulchro de Thales aqui em baixo, quanto é grande a sua gloria na região estrellada.»

Emfim, por mais admiraveis que sejam os trabalhos de Thales, não foi todavia entre os seus discipulos que mais se desenvolveu a evolução mathematica. Essencialmente preoccupados com a pesquisa de uma synthese objectiva, os philosophos desta escola pouco trabalharam, a não ser em astronomia, para aperfeiçoar as vistas scientificas de seu mestre.

E' a Pythagoras (600 a 520 A. C.) e aos seus discipulos que são devidos os primeiros progressos da mathematica. Considerando esta sciencia como a base necessaria de toda a philosophia e de todo o poder social, estes homens eminentes uniram-se numa intimidade salutar para aperfeiçoal-a com ardor. Pythagoras vulgariza entre os seus discipulos a famosa relação entre os quadrados construidos sobre os lados de um triangulo rectangulo, já descoberta pelos theocratas. Este theorema, completando as duas proposições de Thales, permittia instituir toda a *geometria* dos polygonos, e veio fornecer um outro exemplo, não menos decisivo, de uma lei ou *relação constante*.

Deve-se ainda á escola do grande Pythagoras a descoberta das quantidades incommensuraveis, o esboço da theoria das proporções, a qual conduziu naturalmente á doutrina da similhança, bem como o estudo dos numeros triangulares e dos intervallos musicaes. Demais, attribue-se-lhe o estudo dos polygonos regulares, a descoberta de que *o circulo é a superficie*

maximum nas curvas planas isoperimetras, e a esphera o maior volume que superficies iguaes podem envolver.

A escola de Pythagoras elevou-se provavelvente até a comparação dos volumes dos parallelepipedos, pelo menos nos casos mais simples, visto como o problema da *duplicação do cubo* já tinha sido proposto. O seu discipulo Hippocrates de Chio reduzira a resolução deste problema á inserção de duas *medias proporcionaes* entre o lado do cubo dado e o dobro deste lado, sendo a primeira média proporcional o lado do cubo duplo.

O Pythagorico Archytas de Tarento deu deste problema uma solução mais theorica do que pratica, a qual repousa sobre a curva de intersecção de um *cylindro* com um *tóro*. Elle introduziu assim, até certo ponto, a noção geometrica de *curva de dupla curvatura.*

Platão e seus discipulos, principalmente Menechme, deram daquelle problema soluções mais simples, pelo emprego das secções conicas, ou mesmo de curvas mecanicas mais complicadas, e fundaram a theoria dos *lugares geometricos*, bem como o methodo logico chamado *analyse geometrica*. Theon a definia deste modo: Olhar a cousa pedida como si ella fosse dada e marchar de consequencias em consequencias até que se reconheça a cousa procurada. Denostrate, irmão de Menechme, imaginou na mesma época a sua celebre *quadratriz* para a divisão de um angulo em um numero qualquer de partes proporcionaes a linhas dadas, e para a quadratura do circulo, que só mais tarde devia ser achada por Archimedes.

De resto Aristeu (380 A. C.) publicou em cinco livros o resultado das pesquisas dos geometras da escola de Platão sobre as *secções conicas*, mas esta obra, muito estimada entre os antigos, não chegou aos nossos dias. Emquanto a evolução mathematica accumulava assim novos resultados, o movimento philosophico era impellido numa direcção contraria, tornando-se cada vez mais a presa dos literatos e sophistas. A evolução philosophica cedeu o passo á evolução scientifica. Foi então que surgiu Eudoxio de Cnide, que pela natureza de seus

trabalhos foi como que o intermediario entre a Philosophia e a Sciencia.

56 — Reunindo e ligando as sciencias então conhecidas, a philosophia grega devia desenvolvel-as e systematizal-as. Como porém o cabedal scientifico da antiguidade se reduzia apenas á *mathematica*, á *astronomia* nascente, e a algumas noções de *physica*, de *biologia* e *sociologia*, é evidente que a evolução philosophica não tinha elementos para ser continuada sem cair no dominio das divagações metaphysicas.

Eis porque depois de um periodo de cerca de trezentos annos o movimento philosophico havia produzido tudo o que comportava a situação correspondente, graças principalmente aos trabalhos de Thales, Pythagoras, Platão e Aristoteles. Por isso mesmo o movimento philosophico foi seguido pela evolução scientifica que começou tres seculos antes da era christã. Ella teve afinal por centro a cidade de Alexandria, para a qual os Ptolomeus haviam attrahido os mais notaveis sabios gregos, e onde foi fundada a maior bibliotheca da antiguidade.

Comquanto transitoria, a separação entre a philosophia e a sciencia era indispensavel. Uma alliança mais longa seria desastrosa, porque alteraria desde o seu inicio, por uma mistura de especulações methaphysicas e reaes, os caracteres verdadeiramente fundamentaes do methodo positivo.

Com Eudoxio de Cnide, ex-discipulo de Patão (409 a 356 A. C.), accentua-se bem esta transição dos sabios philosophos para os puros sabios da antiguidade. Depois de viajar pelo Egypto onde provavelmente adquiriu o conhecimento dos planetas e da duração de seus periodos, Eudoxio fundou em Cnide um observatorio astronomico e uma escola. Geometra e geographo, tambem philosopho, medico e literato, elle foi sem duvida um dos fundadores da sciencia astronomica, e o mais decisivo precursor de Hipparco. Como geometra, foi elle quem acabou de constituir a theoria das proporções, preparada pela escola pythagorica, devendo-se-lhe tudo o que se contém no quinto livro de Euclides. Sabe-se igualmente que

elle tratou do problema da dupla e média proporcional sem o auxilio das *conicas*, posto que se ignore a curva que empregou.

Suas descobertas geometricas capitaes foram, porém, a cubatura da pyramide triangular, e o conhecimento da relação do volume do cone ao do cylindro de mesma base e de mesma altura. E' o que se deprehende da carta de Archimedes a Dorotheu *(da esphera e do cylindro)*.

Ao lado de Eudoxio, os geometras da escola de Platão proseguiram os estudos emprehendidos pelos pythagoricos sobre a theoria das secções conicas, cujas propriedades principaes, inclusive a das asymptotas, já eram conhecidas antes de Archimedes. E' este mesmo que o declara, de conformidade com o seu habito de citar os trabalhos pertencentes aos seus predecessores, costume tão raro entre os modernos geometras, com excepção do eminente Lagrange.

Emfim, de Eudoxio a Archimedes, a evolução mathematica, sustentando-se por si mesma, prosegue sempre, porem fóra de toda a especulação philosophica. Entre os geometras que se celebrizaram neste intervallo, o mais notavel é Euclides que floresceu no anno de 287 antes de Christo, naquelle mesmo que viu nascer Archimedes.

Euclides coordenou em duas obras notaveis todos os conhecimentos de *geometria* que haviam adquirido seus antepassados. Numa dellas tratava das secções conicas, e embora hoje perdida, sabe-se do seu merito pelo testemunho de Archimedes. A outra obra, os seus *Elementos de Geometria*, já é por nós conhecida. Contem toda a *geometria dos antigos*, e ahi se encontram muitas descobertas do proprio Euclides (6 d). Entre estas deve ser citada a proposição que apresenta os circulos como proporcionaes aos quadrados de seus raios, e bem assim os aperfeiçoamentos que introduziu na

---

(6 a) Na maior parte dos manuscriptos antigos dos Elementos de Euclides vinha annexo o tratado de Hypsicle sobre os cinco polyedros regulares, cujo estudo é attribuido á *escola de Platão*, sendo certo, porém, que já os conhecia a *escola pythagorica*.

theoria das proporções e nos processos logicos usados pelos gregos. Entre estes cumpre citar o que os antigos chamavam *demonstração por absurdo*, a qual consiste em suppor que a *these* proposta não é verdadeira, e dahi *deduzir* uma consequencia contraria ou incompativel com a *hypothese*, e por conseguinte *absurda*.

A *geometria* póde tambem esboçar todos os modos de inducção.

A *observação* é ahi representada pelas concepções abstractas do espaço, dos typos geometricos regulares, e mais tarde pelo methodo infinitesimal; a *experimentação* pelo seu equivalente mental das demonstrações por absurdo; a *nomenclatura* pela terminologia geòmetrica dos corpos de revolução; a *taxonomia comparativa*, sómente surgida ahi nos tempos modernos, pela bella concepção mongeana das familias naturaes das superficies; e a filiação sociologica pelo vasto e profundo encadeamento das theorias geometricas, através as idades successivas da evolução intellectual. Essa aptidão geometrica inductiva está naturalmente ligada ao dominio especial das imagens mathematicas, do mesmo modo que a aptidão deductiva do *calculo* o está ao dos signaes correspondentes.

Comquanto predomine em *geometria* o *methodo deductivo*, sente-se assim que ella esboça tambem os differentes modos de inducção.

Emfim, toda a evolução scientifica da antiguidade pode e deve ser resumida afinal em Archimedes, o mais puro dos grandes geometras dessa epoca, o geometra por excellencia.

Elle descobriu um methodo para a rectificação e quadratura do *circulo*, que depois estendeu á medida dos tres corpos redondos *cylindro*, *cone* e *esphera*; a quadratura da *parabola*, a cubatura dos segmentos do *paraboloide*, do *ellipsoide* e do *hyperboloide* de revolução, problemas mais difficeis que todos os propostos até elle, e que poderiam ter feito surgir o calculo infinitesimal, si a *algebra* se tivesse tornado independente da *geometria* e da *arithmetica*.

Quando Archimedes desapparecia sob as ruinas de Syracusa, Appollonius de Perga (250-200 A. C.) brilhava em Alexandria, dedicando-se ao estudo das propriedades das figuras, unica parte essencial da *geometria antiga* que precisava ser completada. Escreveu então oito livros sobre as secções conicas, onde estas curvas são consideradas num cone obliquo, o que não havia ainda sido feito.

Emfim, a elaboração scientifica dá antiguidade apresenta, como vimos, duas direcções bem distinctas: uma mathematico-astronomica, em qué são obtidos resultados definitivos; outra biologica, em que se chegou apenas a um primeiro apanhado, que o futuro tinha de modificar: Archimedes é o typo mais eminente do primeiro destes movimentos scientificos. Mas, na evolução mathematica entre os antigos, ao lado de Appollonius de Perga devem ainda ser lembrados os nomes dos principaes geometras que o precederam e succederam, desde Euclides (seculo III A. C.) até Pappus (6 e) e Diophante no seculo IV D. C.; e na evolução astronomica os nomes de Eudoxio e Hipparco, o maior astronomo da antiguidade, que completou a *geometria antiga*, instituindo a *trigonometria rectilinea* e mesmo *espherica*.

60 — Todos os progressos realizados pela *geometria* depois da terceira phase da evolução grega (seculo IV D. C.) foram relativamente de pouca importancia, até o inicio da idade mo-

---

(6 e) Pappus era contemporaneo de Theon de Alexandria, e ensinava mathematica naquella cidade durante o reinado de Theodosus I. E' autor de uma obra em oito volumes commentando os trabalhos geometricos dos ultimos seis seculos e enriquecida por importantes addições suas. Para a historia da mathematica antiga este trabalho, cujos seis ultimos volumes e parte do segundo chegaram até nós, é de incalculavel valor Pappus fornece muitos detalhes sobre Appollonius e varios geometras, que de outro modo não seriam hoje conhecidos. Cita os trabalhos de Zenodorus sobre a *isoperimetria* e resolve novos problemas sobre este assumpto no livro V. No livro VI refere-se aos primeiros astronomos; porém, o setimo livro é historicamente o mais importante, porque ahi vemos o *calculo dos antigos* attingir em *geometria* o seu mais alto grau, como que indicando o ponto de partida da revolução mathematica que devia ser mais tarde operada por Descartes. Pappus falla então de Euclides, de Aristheus e de Appollonius, como sendo os principaes cultivadores deste ramo mathematico, embora a ausencia de concepções verdadeiramente algebricas lhe tirasse o valor principal; de sorte que até elle os geometras da Grecia mais o preconizavam do que utilizavam.

derna. A sua parte especial relativa á *trigonometria* não podia ser então completada e systematizada. Já instituida sob a inspiração da *astronomia*, a resolução algebrica dos triangulos só poderia com effeito desenvolver-se si a mesma influencia o exigisse. Mas longe disso, as necessidades sociaes do momento tendiam a determinar uma parada na elaboração scientifica. Porque a dissolução do polytheismo tornava urgente e indispensavel uma nova religião afim de impedir o aniquilamento do nucleo occidental. E essa religião só podia ser o monotheismo, unico modo de theologismo compativel com o conjunto da situação moral, mental e pratica da civilização greco-romana naquelle momento. Ora, o desenvolvimento da *astronomia* estava dependendo do ascendente social do dogma do duplo movimento terrestre, que era incompativel com qualquer fórma de theologismo.

A' vista desta situação historica, os grandes pensadores voltaram a sua attenção para o problema social, e absorveram a sua actividade ou na vida politica ou na regeneração religiosa, conforme os seus antecedentes pessoaes os predispunham para uma ou outra carreira. A cultura scientifica ficou, pois, entregue a espiritos secundarios, incapazes de qualquer iniciativa theorica. Desde então os scientistas gregos limitaram-se essencialmente a conservar, commentar e vulgarizar os resultados adquiridos pelos seus egregios predecessores. Tal foi a unica utilidade do Museu de Alexandria, onde em breve os rhetoricos e metaphysicos começaram a prevalecer.

Baldo do estimulo social, o impulso astronomico de Hipparco foi-se amortecendo desde que se reconheceu que os methodos graphicos permittiam attingir o grau de precisão desejado; de sorte que esses methodos readquiriram, por preferencia, o ascendente que antes tinham por necessidade.

Entretanto a reforma operada na *astronomia* por Hipparco determinou uma melhor utilização das construcções geometricas, que foram adaptadas a partir deste momento á marcha por elle seguida na solução dos problemas que instituira. Tal

foi o destino do *methodo de projecção*, pelo qual Ptolomeu preparou directamente os aperfeiçoamentos que na edade média os arabes haviam de realizar na *trigonometria* Hipparchiana, e que deviam ser completados pelos occidentaes na idade moderna.

Tal como havia sido instituida por Hipparco, a *trigonometria* resolveu essencialmente o seu problema, que consistia em substituir pelos processos numericos as construcções geometricas na resolução dos triangulos, quer rectilineos, quer esphericos. Mas, para que similhante fundação satisfizesse cabalmente aos seus fins, era preciso que ella passasse por uma serie de aperfeiçoamentos, que só começaram a ser realizados nos fins do nono seculo da era catholica. Inaugurados então por Albategnio, principe arabe que viveu nos annos proximos a 880, e continuados pelos muçulmanos, elles só foram proseguidos pelos occidentaes, a partir da segunda metade do seculo XV.

Já nessa época, sob o impulso do infante D. Henrique, a navegação tinha tomado o seu surto decisivo, mediante a fundação da escola de Sagres (em 1421).

As necessidades da navegação determinaram a invenção dos logarithmos por J. Neper, tambem conhecido por Napier, e esta instituição veio facilitar consideravelmente todos os calculos trigonometricos, dando-lhes maior rapidez e precisão.

Obtidos estes aperfeiçoamentos praticos, era ainda preciso que o systema trigonometrico attingisse a sua plena racionalidade, mediante o emprego de formulas simples e geraes, condensando todos os casos possiveis. Este resultado foi conseguido por Viète (1540-1603), com o qual a invenção da moderna algebra permittiu que se chegasse a uma *trigonometria* mais expedita que a dos antigos, e que foi emfim incorporada á *geometria preliminar*.

Ficou assim instituida a solidariedade de todos os progressos mathematicos com os progressos astronomicos, e portanto com toda a evolução theorica. Porque desde então o desen-

volvimento da *algebra*, sob a sua melhor fórma, estava intimamente ligado á completa solução do problema trigonometrico, não só no ponto de vista abstracto, mas tambem no ponto de vista concreto, isto é, tanto quanto o exigisse o seu destino astronomico. A *trigonometria* forneceu assim durante seculos um typo particular mas decisivo da união entre o *calculo* e a *geometria*, que Descartes devia generalizar, e que só Leibnitz, completado por Lagrange, permittiria systematizar. A *mathematica* pôde então se constituir definitivamente, em virtude dessa união entre o abstracto e o concreto, operada por Descartes, o qual veio assim reatar os laços outrora existentes entre a verdadeira philosophia e a pura sciencia. Só restava que a cultura astronomica, de que estava dependendo o surto mathematico, exigisse a completa instituição da *mecanica racional*. Foi o que se deu quando a emancipação das crenças theologicas permittiu a Galileu o estabelecimento do dogma relativo ao duplo movimento terrestre.

Segundo se deprehende das considerações precedentes, desde o fim da evolução grega até o inicio da era moderna, o movimento intellectual reduziu-se sobretudo a conservar e aperfeiçoar os capitaes scientificos já accumulados, sem nada ajuntar-lhes de verdadeiramente caracteristico. Neste longo intervallo, poucas foram as descobertas geometricas realizadas pelos Arabes, e os Hindus se limitaram de preferencia ás especulações numericas.

Estes e principalmente aquelles continuaram entretanto a *arithmetica*, a *geometria*, a *astronomia*, e mesmo a arte medica, traduzindo e commentando os trabalhos legados pela sciencia grega.

Diz-se que foram os hereticos *nestorianos*, perseguidos e refugiados no Oriente, que levaram para ahi a sciencia grega, e verteram para o arabe as respectivas obras. Seja como fôr, é certo que a cidade de Bagdad veio então substituir Alexandria. A civilização islamica, que se estendia de Samarcande a Marrocos, e d'ahi a Cordova na Hespanha, conservou, aper-

feiçoou e propagou a evolução scientifica da antiguidade, até o dia em que o Occidente, recebendo de suas mãos os resultados adquiridos, tomasse por sua vez a frente do movimento, e lhe desse o impulso decisivo.

Estes factos nos mostram emfim que a historia da *geometria*, como a de qualquer sciencia, não pode ser comprehendida quando separada do conjunto da evolução humana. Vimos, com effeito, que foram as necessidades religiosas que determinaram uma paragem na evolução scientifica da antiguidade, cujos aperfeiçoamentos só principiaram a attrahir a attenção dos theoristas depois que ellas foram satisfeitas fundamentalmente, tanto no Occidente como no Oriente. E note-se ainda que os occidentaes só participaram mesmo de tal progresso depois de esgotada a aptidão religiosa do catholicismo, conforme o demonstrou seculo e meio de dissolução espontanea do regimen mediévo.

§ 8.º

Quadrilateros symetricos e especialmente os de lados parallelos; caracter geral do parallelismo das rectas: theoria das parallelas

101 — CARACTER DO PARALLELISMO DE DUAS RECTAS, E SUA DEDUCÇÃO DA LEI DE THALES. Comquanto os quadrilateros symetricos, sobretudo os de lados parallelos, gozem das propriedades geraes inherentes a todos os polygonos, o seu estudo especial torna-se necessario em virtude das multiplas applicações de que são susceptiveis, principalmente nas artes da fórma — *architectada*, *esculpturada* e *pintada*.

Antes, porém, de iniciar a apreciação dos quadrilateros de lados parallelos, precisamos examinar detidamente em que consiste de facto o *parallelismo* de duas rectas.

Sabemos que duas linhas se dizem *parallelas* quando são equidistantes em toda a sua extensão; de sorte que duas ou mais rectas parallelas não podem concorrer para um mesmo ponto, por isso que têm a mesma direcção. E' o que, aliás, deixa vêr o sentido etymologico do termo; porque *parallela* vem do grego *parallêlos*, onde se fórma de *para*, ao lado ou ao longo, e de *allêlos*, um e outro. Comprehende-se, porém, que similhante propriedade tem o inconveniente de exigir muitas vezes, para a sua verificação, que as rectas propostas sejam prolongadas; porquanto póde acontecer que a sua inclinação mutua seja tão pequena que não se torne perceptivel. Dahi resulta, pois, a necessidade de instituir-se um caracter

CIRODDE

geometrico que deixe immediatamente perceber si as rectas consideradas são parallelas ou não. Um tal caracter póde ser obtido inductivamente: a observação nos mostra, com effeito, que duas linhas parallelas são igualmente inclinadas sobre qualquer recta que as córte. E' isto que se vê, por exemplo, ligando no terreno os pontos assignalados pelos pés de duas palmeiras ou de duas arvores quaesquer de troncos verticaes. Tem-se abstractamente uma idéa muito simples do parallelismo, imaginando sobre uma mesma recta duas perpendiculares. Estas serão necessariamente parallelas, isto é, equidistantes em toda a sua extensão; porque si não o fossem, encontrar-se-iam num ponto, e teriamos então desse ponto para a mesma recta, duas perpendiculares a ella, o que vimos ser impossivel. E note-se neste caso que, de acordo com o caracter acima indicado, estas duas parallelas são igualmente inclinadas de 90° sobre a recta em questão.

Destarte, vê-se que a verificação do parallelismo fica reduzida immediatamente a constatar si as rectas propostas fazem ou não angulos iguaes com qualquer transversal que as córte, contanto que essas inclinações sejam sempre apreciadas no mesmo sentido.

Ao envés de exprimir logo esta noção tão directa e intuitiva, Euclides (8 a) e os seus successores classicos tiveram a absurda pretenção de precisal-a mais, substituindo-a por um

(8 a) Vide *Elementos de Euclides*: Os seis primeiros livros do undecimo e duodecimo da versão latina de Frederico Commandino, addicionados e illustrados pelo professor inglez Robert Simpson, foram traduzidos para o portuguez (Lisboa — 1855). Eis o juizo de A. Comte a respeito de Euclides: «... um theorico que, sem ser original, apresenta alguma importancia historica, como typo espontaneo de uma certa positividade. Só o apparecimento de um tratado didactico, digno fructo inicial da instituição alexandrina, provará assás a consistencia decisiva e a estima universal já adquirida pela *geometria*. Mas, a composição de Euclides indica tambem a difficil existencia dos verdadeiros pensadores, então forçados a elaborar a sciencia num meio profundamente sophistico. Foi para garantir a pureza do raciocinio geometrico da subtileza dos dialecticos, que este estimavel professor empregou precauções muito minuciosas, cuja empirica imitação se tornou logo inescusavel. Todavia si elle fosse mais eminente, teria podido já preencher uma tal condição sem alterar o verdadeiro espirito das descobertas, cujo encadeamento devia ser então mais facil de manifestar que de dissimular.» Polit. Posit. t. III

principio negativo que consiste em admittir que a *perpendicular e a obliqua a uma recta se encontram á fortiore, sendo prolongadas sufficientemente.* (Postulado de Euclides). E' evidente que uma concepção tão simples não exigia que o geometra didactico da antiguidade estabelecesse esse *postulatum*, assim chamado por servir de principio fundamental á sua theoria das parallelas. Seria preferivel que admittisse logo como *axiomas, que uma recta tem a mesma direcção em todo o seu comprimento, e que um angulo indica a differença entre duas direcções; que duas rectas parallelas são aquellas que têm a mesma direcção, e que por consequencia duas rectas parallelas são igualmente inclinadas em relação a uma outra recta qualquer que as córte.*

Todavia, é facil de ver que a theoria das parallelas não necessita de nenhum *postulado* para ser instituida. O caracter geral do parallelismo, donde resultam todas as propriedades essenciaes de similhantes rectas, póde ser deduzido immediatamente da primeira lei de Thales, como passamos a mostrar.

Deducção do caracter de parallelismo de duas rectas. Consideremos os triangulos ABC, ABC_1, ABC_2,... (Fig. 29) que têm o mesmo lado AB. Como a somma dos três angulos de qualquer triangulo é constantemente igual a 2 $\wedge$ rectos, segue-se que crescendo continuamente os angulos adjacentes A e B, será preciso que o angulo opposto ao lado AB decresça successivamente. Portanto, para um triangulo cujo vertice C_n esteja a uma distancia infinitamente grande do lado opposto AB, o angulo em C_n será infinitamente pequeno; e de conformidade com o principio fundamental do methodo infinitesimal (63), poderá esse angulo ser desprezado em presença dos angulos adjacentes A e B, *cuja somma valerá então dois angulos rectos.* Teremos, pois, neste caso

$$\wedge A' + \wedge A = 180^\circ;$$

quando as rectas A C e B C se tornarem parallelas. Esta propriedade serve de lemma á *theoria das parallelas*. Com effeito, prolongando A B até E, vê-se que o angulo E B D sendo supplementar de A B D (Fig. 30) será tambem

$$EBD + ABD = 180^\circ,$$

donde resulta que $\wedge CAB = EBD$, isto é *que as duas rectas parallelas A C* e *B D são igualmente inclinadas sobre a transversal A E.*

Para apreciar as consequencias que resultam deste caracter do parallelismo, prolonguemos a transversal A E até F, assim como respectivamente as rectas A C e B D até C' e D'. (Fig. 30). Os angulos A e α, que correspondem á inclinação commum das duas parallelas C C' e D D', um interno e outro externo a ellas, são chamados *correspondentes;* este nome tambem é dado aos seus iguaes e oppostos pelos vertices A e B, isto é, a A' e α', bem como aos angulos B e β, B' e β', que medem, tambem em sentido opposto, a inclinação commum das mesmas parallelas.

Da igualdade dos angulos *correspondentes* ou *internos* e *externos*, resulta immediatamente a dos angulos internos e alternados, A e α', B e β', situados de um e de outro lado da transversal e entre as parallelas, sendo chamados por isto *alternos-internos*; porque cada um delles é igual a um correspondente que lhe é opposto pelo vertice. Pela mesma razão, tornam-se iguaes os angulos externos de A', β e B' que, situados alternadamente de um e de outro lado da transversal e fóra das parallelas, são chamados por isso *alternos-externos.*

Emfim, a relação $\wedge A + \wedge B = 180^\circ$ nos tendo mostrado que são supplementares os angulos internos A e B situados de um mesmo lado da transversal, deduzimos dahi que são tambem supplementares os angulos internos do outro lado, bem como os externos que lhes são respectivamente oppostos pelos vertices.

Resumindo tudo o que precede, póde-se, pois, dizer que duas rectas parallelas formam com uma transversal:

1.° *angulos internos do mesmo lado supplementares;*
2.° *angulos correspondentes iguaes;*
3.° *angulos alternos-internos iguaes:*
4.° *angulos alternos-externos iguaes:*
5.° *angulos externos do mesmo lado supplementares.* (8.b)

Corollarios. Das igualdades precedentes deduzem-se estas consequencias:

I. Que *são iguaes os angulos cujos lados têm a mesma direcção e os mesmos sentidos* (angulos correspondentes), bem como *os angulos cujos lados têm a mesma direcção em sentidos oppostos* (alternos-internos e alternos-externos).

II. As mesmas igualdades nos mostram que *são supplementares os angulos cujos lados têm a mesma direcção, quando dois lados são respectivamente dirigidos no mesmo sentido e*

(8 b) Tal é o modo pelo qual, segundo A. Comte, se póde deduzir da lei de Thales o caracter geral do parallelismo de duas rectas. Além da vantagem de ligar immediatamente a theoria das parallelas á dos triangulos, esta marcha nos offerece, como vimos, uma segunda applicação do principio que serve de base ao methodo infinitesimal. Suppondo que um dos vertices do triangulo se acha situado a uma distancia infinitamente grande do lado opposto, é evidente que os dois lados correspondentes formarão entre si um angulo infinitamente pequeno, que por isso podemos desprezar, em presença dos dois outros angulos finitos. Assim, pois, quando duas rectas se encontram a uma distancia infinitamente grande de nós, podemos consideral-as como parallelas. Nestas condições se acham, por exemplo, dois raios luminosos que nos vêm de uma estrella ou do sol, etc.,... os quaes, pelo seu immenso afastamento, pódem ser olhados como parallelos. E esta concepção foi expressa por Varignon, de um modo abreviado, dizendo que *duas parallelas se encontram no infinito, fazendo entre si um angulo nullo.* Veremos adiante a utilidade pratica dessa concepção, quando se trata de representar sobre um plano a superficie do nosso planeta ou a parte apparente de um astro. Suppondo um observador collocado neste, é evidente que os raios visuaes dirigidos para aquelle podem ser tidos como parallelos, em virtude da grande distancia do ponto de vista. Reciprocamente, é facil de verificar que duas rectas parallelas de grande extensão nos apresentam a *perspectiva* de concorrerem para um ponto, como se póde vêr observando os trilhos de uma via ferrea, uma rua de grande extensão, etc...

os dois outros em sentido contrario (angulos internos ou externos do mesmo lado, angulos adjacentes). Esta conclusão e a precedente podem ser resumidas, dizendo-se simplesmente que *são iguaes dois angulos de lados parallelos, quando estes são dirigidos no mesmo sentido, ou em sentido contrario;* e que *são supplementares quando dois delles são dirigidos no mesmo sentido e os outros dois em sentido contrario.*

III. As mesmas igualdades nos deixam ainda ver que *duas parallelas têm perpendiculares communs.* Porque si a perpendicular a uma das parallelas não o fosse tambem á outra, não teriam ellas a mesma inclinação sobre a perpendicular, e portanto deixariam de ser parallelas.

IV. As mesmas igualdades mostram tambem que *por um ponto fóra de uma recta não se lhe póde traçar mais de uma parallela.* Porque se isso fosse possivel, baixando desse ponto uma perpendicular sobre a recta considerada, esta o seria tambem ás parallelas traçadas, e ter-se-ia então naquelle ponto mais de uma perpendicular á mesma recta, o que vimos ser impossivel.

V. Duas parallelas gozam sempre das cinco propriedades acima indicadas, e quando qualquer dellas se verifica a respeito de duas rectas, estas são parallelas; dahi se conclue que as rectas em que não tem lugar nenhuma destas propriedades não são parallelas.

Por exemplo, duas rectas D E e F G (Fig. 31), perpendiculares a duas outras A B e B C que se encontram, não são parallelas; pois si tirarmos a transversal G E, que liga as intersecções G e E das perpendiculares, é claro que a somma dos angulos D E G e F G E, internos do mesmo lado, é menor que a dos dois angulos rectos D E B e F G B. Assim, pois, *quando duas rectas se encontram, as suas perpendiculares tambem se encontram.* E note-se mais que *os dois angulos, um agudo e outro obtuso, que têm os lados perpendiculares, são necessariamente supplementares;* porque no quadrilatero formado pelos seus lados, a somma dos angulos internos é quatro rectos,

e como dois desses angulos são formados pelas perpendiculares, torna-se evidente que os outros dois são supplementares.

Si os dois angulos, B e D, *de lados perpendiculares forem ambos agudos* (Fig. 32), *é facil verificar que são iguaes como complementos de angulos iguaes,* F = F', isto é:

$$D + F = 90^\circ \text{ e } B + F = 90^\circ, \text{ donde } B = D$$

Reciproca. Si duas rectas, cortadas por uma transversal, satisfizerem a qualquer das cinco condições acima indicadas, satisfarão necessariamente ás quatro outras, e serão parallelas.

Supponhamos a principio duas rectas, D E e F G, que fazem com uma terceira H I, e do mesmo lado relativamente a esta, os angulos iguaes E M H e G L H (Fig. 33), um dentro e outro fóra, e mostremos que estas duas rectas são parallelas.

Para isto, baixemos do ponto K, meio de L M, a perpendicular K P sobre D E, e a prolonguemos até encontrar F G no ponto Q. Formamos os triangulos M P K e L Q K, iguaes entre si por terem um lado igual adjacente a dois angulos respectivamente iguaes, porque segundo a hypothese, o angulo K M P ou E M H é igual ao angulo K L Q, opposto pelo vertice a G L H, o angulo M K P é igual a L K Q por construcção, e M K = K L. Logo, o angulo K Q L será igual á M P K, e por consequencia recto. Portanto, *as duas rectas* D E *e* F G, *sendo ambas perpendiculares á mesma recta* P Q, *serão parallelas entre si.*

Os angulos que suppusemos iguaes foram aquelles a que chamamos *correspondentes.* Si admittirmos que a igualdade existe entre dois quaesquer dos que denominámos *alternos-internos* ou *alternos-externos,* a questão reduz-se á precedente substituindo um desses angulos pelo que lhe é verticalmente opposto. Emfim, na hypothese de serem supplementares os angulos internos ou externos do mesmo lado da transversal, a questão reduz-se ainda ao caso da igualdade dos angulos correspon-

dentes. Além disto si $EMI = GLH$ e, portanto igual a 90°, as duas rectas serão perpendiculares á transversal, e dahi resulta que *duas perpendiculares a uma mesma recta são parallelas*. Porque designando por E e E′ os angulos externos e por C e C′ os correspondentes que lhes são respectivamente adjacentes, teremos, por hypothese, $E + E' = 2 \wedge$ rectos; e como $C + E = 2 \wedge$ rectos, por serem adjacentes, virá $E + E' = C + E$ ou $E' = C$; e ainda por ser $C' + E' = 2 \wedge$ rectos, será tambem $E + E' = C' + E'$ ou $E = C'$.

102 — INSTITUIÇÃO DEDUCTIVA DOS CARACTERES PROPRIOS AOS QUADRILATEROS SYMETRICOS. Resultam das propriedades precedentes os caracteres proprios aos quadrilateros de lados parallelos, symetricos ou não. São elles o *trapezio* e o *parallelogrammo* que póde ser por sua vez *rectangulo*, *quadrado* ou *losango*. Sabemos que o trapezio (do grego *tetra peza*, quatro pés) é o polygono de quatro lados, de que dois são parallelos, chamando-se ainda *isosceles* si os outros dois lados forem iguaes, e *rectangulo* si um destes fôr perpendicular áquelles. O parallelogrammo (do grego *parallelos* parallela, e *gramma* linha) é o polygono de quatro lados que são parallelos dois a dois. O *parallelogrammo* que tem os quatro angulos rectos denomina-se *rectangulo*, que toma por sua vez o nome de *quadrado* quando os quatro lados são iguaes. O parallelogrammo cujos quatro lados são iguaes, mas onde os quatro angulos são obliquos, denomina-se *losango* (do grego *loxos* obliquo, e do latim *angulus* angulo). Este parallelogrammo tambem se chama *rhombo*, e quando o quadrilatero tem sómente iguaes os lados consecutivos dois a dois, dá-se-lhe o nome de rhomboide. Caracterizemos successivamente cada uma destas especies de polygonos.

I. *Em todo parallelogrammo:* a) *são supplementares os dois angulos adjacentes a cada lado, e iguaes os angulos oppostos;* b) *são iguaes os lados oppostos;* c) *suas diagonaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes.*

Com effeito, seja o parallelogrammo $ABCD$ (Fig. 34): a) Dois angulos consecutivos são ahi supplementares por se

acharem do mesmo lado de uma transversal cortando duas parallelas. Dois angulos oppostos são sempre iguaes pois sendo $A + B = 2r$, e $B + C = 2r$, resulta: $A + B = B + C$, donde $A = C$. b) Dois lados oppostos quaesquer, AB e CD, por exemplo, são sempre iguaes entre si. Porque traçando a diagonal BD, são iguaes os triangulos ABD e BCD, por terem o lado commum BD, adjacente a angulos iguaes, a saber: $\wedge ADB = \wedge DBC$ como alternos-internos das parallelas AB e CD e da transversal BD, e $\wedge ABD = \wedge BDC$ como alternos-internos em relação ás mesmas parallelas e á transversal BD. Sendo iguaes os dois triangulos, conclue-se que $AB = CD$, e $AD = BC$, como lados oppostos a angulos respectivamente iguaes.

Como os lados oppostos do quadrilatero são parallelos, por hypothese, esta demonstração nos deixa ver que *partes de parallelas comprehendidas entre parallelas são iguaes.*

c) Cada uma das diagonaes AC e BD é cortada pela outra, no ponto O, em duas partes iguaes. Porque os dois triangulos AOB e DOC têm um lado igual, adjacente a dois angulos iguaes, a saber: $AB = CD$ como lados oppostos do parallelogrammo; $\wedge BAO = \wedge OCD$ como alternos-internos em relação ás parallelas AB e CD cortadas pela transversal AC; e $\wedge OBA = \wedge ODC$ como alternos-internos em relação ás mesmas parallelas cortadas por BD. Assim, pois, são iguaes os dois triangulos AOB e COD, e por conseguinte o lado OB, opposto ao $\wedge OAB$, é igual ao lado OD, opposto ao $\wedge OCD$, e o lado OA, opposto ao $\wedge OBA$, é igual ao lado opposto ao $\wedge ODC$.

Reciprocamente, um quadrilatero é um parallelogrammo:

a) *si os lados oppostos são iguaes e parallelos dois a dois;*
b) *si seus angulos oppostos são iguaes dois a dois;*
c) *si suas diagonaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes;*

a) Com effeito, são iguaes os triangulos A B D e B C D por terem o lado B D (Fig. 34) commum, o lado A B = C D por hypothese, e ∧ A B D = B D C por causa das parallelas A B e C D em relação á transversal B D (dois lados iguaes e igual o angulo comprehendido). Da igualdade dos triangulos, conclue-se que A D = B C, e que estas rectas são parallelas, por ser o ∧ A D B = ∧ D B C: logo a figura é um parallelogrammo. b) Os angulos oppostos A e C sendo iguaes entre si, assim como os angulos B e D, vê-se que dois angulos consecutivos quaesquer, B e C, por exemplo, têm uma somma igual á metade da somma dos angulos do quadrilatero, isto é, a dois ∧ rectos. Estes dois angulos B e C sendo supplementares, e alem disto internos do mesmo lado relativamente ás duas rectas A B e C D, cortadas por B C, concluimos que estas duas linhas são parallelas. Do mesmo modo demonstrariamos que sendo os angulos A e B supplementares, os dois outros lados, A D e B C, são parallelos. Logo o quadrilatero A B C D é um parallelogrammo. c) Desde que se supponha O A = O C e O B = O D, os angulos A O B e C O D sendo alem disso iguaes como oppostos pelo vertice, segue-se que os dois triangulos A O B e C O D são iguais. Portanto ∧ O A B = ∧ O C D. Ora, estes angulos iguaes sendo alternos-internos em relação ás rectas A B e C D cortadas por A C, segue-se que os lados oppostos A B e C D são parallelos. Da igualdade dos triangulos A O D e B O C, deduziriamos similhantemente a igualdade dos angulos O A D e O C B, e por conseguinte o parallelismo dos dois outros lados oppostos A D e B C. O quadrilatero A B C D, tendo os seus lados oppostos parallelos dois a dois, é, pois, um parallelogrammo.

II. *Todo rectangulo é um parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes, e reciprocamente todo parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes é um rectangulo.*

Com effeito, notemos em primeiro lugar que todo rectangulo é um parallelogrammo, porque seus angulos oppostos são iguaes como rectos. Em segundo lugar, os dois triangulos

DAB e BCD (Fig. 35), por exemplo, são iguaes por terem um angulo igual comprehendido por dois lados iguaes, isto é, $\wedge$ DAB = $\wedge$ BCD, os lados AB e CD bem como AD e BC iguaes como lados oppostos de um parallelogrammo; por conseguinte, tirando a diagonal AC, vê-se que ella é igual a BD, como hypotenusas dos triangulos rectangulos iguaes DAB e ABC.

Reciprocamente, si duas diagonaes de um parallelogrammo forem iguaes, será elle um rectangulo, visto como os dois triangulos ABD e ABC são iguaes por terem os três lados respectivamente iguaes, a saber: as duas diagonaes, por hypothese, AB commum, e AD = BC como lados oppostos de um parallelogrammo. Portanto, $\wedge$ DAB = BCD; e do mesmo modo se mostrará que $\wedge$ ABC = ADC; e por ser cada um delles igual ao seu opposto, vê-se que o parallelogrammo considerado tem todos os angulos iguaes. Ora, a somma desses angulos valendo quatro rectos, segue-se que cada um delles é igual a um angulo recto, e que por conseguinte o parallelogrammo considerado é um rectangulo.

III. *Todo quadrado é um parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes, perpendiculares entre si, e bissectrizes dos angulos oppostos.*

Reciprocamente, *todo parallelogrammo é um quadrado quando suas diagonaes são:*

a) *iguaes e perpendiculares entre si;*
b) *iguaes e uma dellas sendo, além disso, bissectriz dos angulos cujos vertices liga.*

A demonstração destas duas proposições não offerece nenhuma difficuldade.

IV. *Todo losango é um parallelogrammo cujas diagonaes são desiguaes, perpendiculares uma á outra, e bissectrizes dos angulos oppostos.*

Em primeiro lugar, todo losango é um parallelogrammo porque seus lados oppostos são iguaes.

Em segundo lugar, os triangulos ABC e ADC (Fig. 36) sendo isosceles, visto como os quatro lados de um losango são iguaes, a diagonal BD que passa pelo meio O da diagonal AC é ao mesmo tempo perpendicular sobre AC e bissectriz dos angulos B e D. Por um motivo analogo, a diagonal AC é bissectriz dos angulos A e C. Note-se, emfim, que estas diagonaes são desiguaes, porque ficam oppostas a angulos desiguaes nos dois triangulos a que pertencem.

Reciprocamente, *todo parallelogrammo é um losango quando suas diagonaes são desiguaes e perpendiculares uma á outra, ou si qualquer dellas é bissectriz dos angulos cujos vertices liga;* o que facilmente se demonstra.

V. Por analogia com o losango ou rhombo, chamou-se rhomboide (do grego *rhombos* rhombo, e *eidos* similhança) ao quadrilatero symetrico onde apenas são iguaes dois a dois os lados consecutivos e dois dos angulos oppostos (Fig. 37). Não participa das propriedades do parallelogrammo, porque todos os lados e angulos oppostos não são iguaes respectivamente. Distingue-se especialmente do losango porque, das diagonaes, embora perpendiculares, sómente uma é bissectriz dos angulos cujos vertices liga (8 c), sendo, aliás, dividida pela outra em duas partes desiguaes.

103.—RESULTADOS DO PRIMITIVO ESTUDO DO TRAPEZIO PELOS GEOMETRAS DA ESCOLA DE MILETO: PROPRIEDADES DA PARALLELA Á BASE DE UM TRIANGULO. O quadrilatero chamado *trapezio*, isto é, aquelle em que sómente dois lados oppostos são parallelos póde ser *escaleno*, *isosceles* ou symetrico, e *rectangulo*, conforme os dois lados não parallelos são desiguaes, iguaes ou um delles

---

(8 c) A denominação de *rhomboide* tem sido dada impropriamente aos corpos fechados cujas faces são *rhombos* ou *losangos*: devem, porém, ser chamados *rhomboedros*. Os antigos tambem denominavam rhomboides os parallelogrammos de angulos obliquos tendo sómente iguaes os lados oppostos, ao envés de todos elles como no *losango*.

perpendicular aos lados parallelos. Chama-se *linha mediana do trapezio* a recta que une os meios dos lados não parallelos.

Consideremos um trapezio escaleno A B C D (Fig. 38), e por um ponto qualquer F do lado transversal A B, tracemos F E parallelamente á base A D, e por conseguinte tambem á outra base B C. *Estas três parallelas*, A D, F E e B C, *cortam sempre os dois lados transversaes*, A B e C D, *em partes proporcionaes;* isto é, A F : F B :: D E : E C.

Demonstração. Dois casos podem ter lugar: 1.° que A F seja commensuravel com A B; isto é, que a razão de A F para A B se possa exprimir exactamente por dois numeros.

Supponhamos, por exemplo, que temos

$$AB : AF :: m : n;$$

isto é, si concebermos a recta A B dividida em *m* partes iguaes, A F conterá *n*, e F B terá m—n. Tirando depois por todos os pontos de divisão, parallelas a A D, a recta D C se achará dividida em *m* partes iguaes, das quaes *n* comporão D E, e m—n comporão E C; portanto teremos

$$AF : FB :: n : m - n \text{ e } DE : EC :: n : m - n$$

donde se segue A F : F B :: D E : E C.

Demais, em consequencia das proporções

$$AB : AF :: m : n \text{ e } DC : DE :: m : n$$

teremos tambem A B : A F :: D C : D E.

Notemos, de passagem, que as partes assignaladas em C D pelas parallelas tiradas pelos pontos de divisão de A B são todas iguaes entre si, embora em geral differentes das partes de A B. E' o que se póde ver traçando, por exemplo, as parallelas E F, G H, K L e M N, (Fig. 39), e tirando pelos pontos

C, L, H, E e N as rectas C*c*, L*l*, H*h*, E*e*, e N*n* parallelamente ao lado A B. Os triangulos assim formados são todos iguaes entre si, visto como os lados C*c*, L*l*, H*h*, E*e* e N*n* são partes de parallelas interceptadas por parallelas; os angulos em C, L, H, E e N são iguaes como *correspondentes* áquellas parallelas e á transversal C D, e os angulos em *c*, *l*, *h*, *e* e *n* são tambem iguaes como alternos-internos relativamente ás parallelas C*c*, L*l*, H*h*, E*e* e N*n*, e ás transversaes B C, K L, G H, F E, M N, e A D: assim, pois, têm elles um lado igual, adjacente a dois angulos respectivamente iguais, e dessa igualdade concluimos, emfim, que C L = L H = H E = E N = N D.

2.º Si A B e A F forem incommensuraveis, provaremos, da maneira seguinte, que a razão não pode ser nem menor nem maior que a de D C para D E:

Seja a principio A B : A F : : D C : D I, sendo D I menor que D E (Fig. 38). Podemos dividir o lado A B em partes tão pequenas que, tirando por todos os pontos de divisão, parallelas a B C, passe uma dellas, *fe*, entre os pontos I e E; teremos, pelo que fica visto, em virtude da commensurabilidade de A B para A*f*, A B : A*f* : : D C : D*e*; os antecedentes desta proporção sendo os mesmos que os da anterior, concluir-se-ha daqui uma nova proporção entre os consequentes de ambas: A F : A*f* : : : : D I : D*e*, resultado absurdo porque sendo A F maior do que A*f*, será D I menor que D*e*. Tambem não póde ser A B : A F : : : : D C : D I', sendo D I' maior que D E; porque tendo dividido A B de maneira que uma das parallelas *f' e'* caia entre os pontos E e I, teremos A B : A*f'* : : D C : D*e'*. Fazendo uma nova proporção entre os consequentes desta ultima e os da precedente, teremos

$$AF : Af' :: DI' : De',$$

resultado tambem absurdo, porque sendo A F menor que A*f'*, é D I' maior que D*e'*: logo o quarto termo da proporção formada pelas rectas A B, A F, D C, necessariamente ha de ser D E. Da proporção A B : A F : : D C : D E, tira-se A B — A F :

$:AF::DC-DE:DE$, ou $FB:AF::EC:DE$; ou finalmente $AF:FB::DE:EC$, invertendo as duas razões. (8 d).

Da proposição precedente deduzem-se os seguintes corollarios:

1.° *Corollario.* Consideremos ainda o mesmo trapezio $ABCD$ (Fig. 38). Si tirarmos pelo ponto B a recta BC_1 parallelamente a CD, formaremos o triangulo ABC_1 cujo lado BC_1 interceptará a parallela FE no ponto G. Ora, pelo que fica dito, $AF:FB::DE:EC$; mas $EC=BG$ e $GC_1=$ $=DE$, como partes de parallelas interceptadas por parallelas. Portanto, substituindo EC e DE por suas iguaes, a proporção precedente se transforma em $AF:FB::C_1G:GB$.

Logo, *si tirarmos em um triangulo uma recta FG, parallela a um dos lados* AC_1, *os outros dois lados,* BA e BC_1 *ficarão cortados em partes proporcionaes por esta recta.*

2.° *Corollario.* Reciprocamente, *quando uma recta corta dois lados de um triangulo em partes proporcionaes ella é parallela ao terceiro lado.*

Com effeito, si no triangulo ABC_1 (Fig. 38), tivessemos $AB:AF::C_1B:C_1G$, e a linha FG não fosse parallela a AC_1 poderiamos tirar pelo ponto F uma recta FH parallela AC_1, e que daria: $AB:AF::C_1B:C_1H$ (1.° corol.), proporção que tem os mesmos três primeiros termos que a precedente: logo $FG=FH$, e por consequencia as rectas FG e FH se confundem; e a primeira é necessariamente parallela a AC_1.

3.° *Corollario. A recta BD* (Fig. 40), *que divide em duas partes iguaes um dos angulos B de um triangulo qualquer* ABC_1 *reparte o lado opposto AC em dois segmentos pro-*

(8 d) Ainda que a razão entre duas linhas incommensuraveis não seja rigorosamente assignalavel, nem por isso deixa de existir, porque podemos aproximar-nos della quanto quisermos; e duas razões incommensuraveis devem ser reputadas iguaes quando, por mais longe que se leve a aproximação para uma e outra, a sua differença seja sempre nulla. (Lacroix-Geometria).

porcionaes aos lados adjacentes. Isto é, teremos esta proporção:

$$AD : DC :: AB : BC$$

Isto se prova, tirando CE parallela a BD, e que encontre em E o prolongamento de AB. Resulta assim do 1.º corollario:

$$AD : DC :: AB : BE;$$

demais, o triangulo CBE é isosceles, porque o angulo BCE é igual a CBD, como alternos-internos relativamente á transversal BC, e o angulo BEC é igual ao angulo ABD como correspondentes em relação á transversal AE, e os angulos ABD e CBD são iguaes como metades do mesmo angulo ABC: portanto, os angulos BCE e BEC tambem são iguaes, logo BE é igual a BC como lados oppostos a angulos iguaes; donde finalmente:

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Advertencias:

1.ª Suppondo que o triangulo ABC não é isosceles nem equilatero, a proporção precedente é ainda verdadeira relativamente á bissectriz BD do angulo exterior EBC (Fig. 41); isto é, *a bissectriz do angulo exterior a um triangulo divide o lado opposto prolongado em dois segmentos proporcionaes aos lados adjacentes,* isto é: AB : BC :: AD : CD.

Com effeito, tirando pelo ponto C a recta CF parallelamente á bissectriz BD, até encontrar o lado AB, e prolongando o lado AC até D, teremos no triangulo ABD, em consequencia da parallela ao lado BD, a proporção:

$$AC : CD :: AF : FB,$$

ou
$$AC + CD : CD :: AF + FB : FB,$$

isto é,
$$AD : CD :: AB : BF \quad (1)$$

tam igualmente do pé desta perpendicular, isto é, do ponto D onde ella encontra a recta BB', são iguaes, e das que se afastam desigualmente, a que mais se afasta é a maior.

Com effeito, as distancias BD e DB' sendo iguaes por hypothese, bem como os angulos BDA e ADB' por serem rectos, concluimos a igualdade dos dois triangulos rectangulos assim formados, visto terem dois cathetos iguaes; logo $AB = AB'$.

Si agora tirarmos pelo ponto A a recta AE, que se afasta de D mais do que AB, e si prolongarmos AD para baixo de BB' de uma quantidade $DC = DA$ (Fig. 16), tirando as rectas CB e CE, teremos evidententemente

$$AE + EC > AC \quad (63) \quad \text{ou} \quad AE + EC > AD + DC.$$

Mas os triangulos rectangulos ADE e CDE são iguaes por terem seus cathetos iguaes, isto é, DE commum e $AD = DC$, logo teremos $AE = CE$.

Verifica-se do mesmo modo que $AB = CB$. E sendo evidentemente $AE + EC > AB + BC$, resulta que $2\,AE > 2\,AB$ ou emfim $AE > AB$, o que mostra que as linhas que mais se afastam da perpendicular são mais compridas.

Dahi resulta immediatamente: 1.° que *se duas obliquas são iguaes, não podem cair do mesmo lado da perpendicular, mas se afastam igualmente do seu pé de cada lado della,* porquanto vimos precedentemente que $\triangle ABD = AB'D$, e supponde $AB = AB'$, os dois triangulos rectangulos ABD e ADB' são iguaes por terem respectivamente a hypotenusa e um angulo agudo igual, donde resulta que $BD = DB'$; 2.° que *si duas obliquas são desiguaes, a maior se afasta mais da perpendicular,* porque sendo $AE > AB$, é evidente que $DE > DB$; 3.° que *a perpendicular* AD *é a mais curta de todas as linhas que se podem tirar de um ponto* A *para uma recta* BB' e por consequencia é a medida natural da distancia entre esse ponto e a recta; 4.° que *a perpendicular* AD *ao meio de uma recta*

B B' *tem todos os seus pontos equidistantes dos extremos desta recta*, porque sendo tirada ao meio de B B', si tomarmos sobre a sua direcção um ponto qualquer F, teremos sempre F B = FB', por este motivo se costuma dizer que *a perpendicular ao meio de uma recta é o lugar geometrico de todos os pontos equidistantes dos extremos dessa recta;* 5.º que *um ponto qualquer* G, *tomado fora da perpendicular a uma recta, está desigualmente distante dos seus extremos* B e B' porque teremos

$$GB < BF + FG,$$

donde $$BG < B'G,$$

visto como $$BF = B'F \text{ e } BG < BF + FG;$$

6.º que *de um ponto a uma recta não se podem tirar três rectas iguaes;* 7.º, finalmente, que de *um ponto* A, *tomado fora de uma recta* B B', *não se pode abaixar sobre esta recta mais do que uma perpendicular* A D, porque si fosse possivel tirar uma outra A E, o triangulo A D E, além do angulo em A, teria os dois angulos rectos em D e em E, o que é absurdo (63).

Estas propriedades das perpendiculares permittem deduzir as seguintes proposições relativas aos triangulos.

I. *A perpendicular baixada de um dos vertices de qualquer triangulo sobre o lado opposto divide-o em dois triangulos rectangulos additivos ou subtractivos, conforme ella cae no interior ou no exterior delle.* E' o que se vê immediatamente nas figuras 17 e 18. Na 1.ª a perpendicular B D, decompõe o triangulo A B C nos dois triangulos rectangulos B D A e B D C que são *additivos* porque sendo sommados o reproduzem. Na 2.ª, a perpendicular B D, caindo fóra do triangulo A B C, determina tambem dois triangulos rectangulos, B D C e B D A, que são *subtractivos* porque é preciso subtrahir o menor do maior para ter o triangulo proposto, isto é B D A — B D C = = B A C.

Vê-se que na 1.ª hypothese os angulos A e C são necessariamente agudos, e na 2.ª um é agudo e outro obtuso. De

sorte que *a perpendicular baixada de um dos vertices de qualquer triangulo sobre o lado opposto cae dentro delle si os angulos adjacentes são ambos agudos, e fóra si um é agudo e o outro obtuso.* Si um destes angulos fôr recto, torna-se evidente que a perpendicular coincidirá com o lado correspondente do triangulo. A perpendicular tirada do vertice superior B sobre o lado opposto A C denomina-se *altura* do triangulo, e este lado recebe o nome de *base*. A *altura* e a *base* indicam, pois, as duas dimensões do triangulo.

II *A perpendicular baixada do vertice de um triangulo isosceles sobre a sua base divide esta ao meio, e é bissectriz do angulo do mesmo vertice.* E' o que se vê na figura 19 que representa um triangulo isosceles. Os dois triangulos A B D e B D C, determinados pela perpendicular B D, são ahi iguaes, porque têm respectivamente B A = B C, por hypothese, B D commum e A D = D C, visto como as obliquas iguaes A B e B C se desviam igualmente do pé da perpendicular. Logo os outros elementos são iguaes; portanto, B A D = B C D, e o angulo B fica dividido em duas partes iguaes A B D = D B C.

Dahi concluimos tambem que B A D = ∧ B C D, isto é, que *em todo triangulo isosceles os angulos da base são iguaes.*

Reciprocamente, *si dois angulos de um triangulo são iguaes, os lados oppostos tambem o são* (e o triangulo é isosceles); porque os dois triangulos rectangulos determinados pela perpendicular B D são iguaes, visto como têm respectivamente um catheto e um angulo agudo iguaes, isto é, B D commum e B A D = B C D; logo são iguaes, e portanto B A = = B C.

E como todo triangulo equilatero é tambem isosceles, as propriedades precedentes se applicam a elle, podendo-se, pois, dizer que *todo triangulo equilatero é tambem equiangulo.*

III *A perpendicular baixada do vertice de um triangulo escaleno sobre o lado opposto divide este em duas partes desiguaes, e bem assim o angulo do vertice.* E' o que se vê na

Fig. 17 onde os dois triangulos rectangulos B A D e B C D são desiguaes, por não satisfazerem a nenhuma das condições indicadas no numero 64. Com effeito, sendo iguaes os angulos em D e o lado B D commum, não póde ser $AD = DC$, nem $\wedge ABD = DBC$; porque si assim fosse, os dois triangulos rectangulos seriam iguaes por terem um catheto e um angulo agudo iguaes, e portanto viria $AB = BC$, o que é contrario á hypothese.

Suppondo $AB < BC$, é facil de vêr tambem que seria $\wedge BCA < \wedge BAC$. Porque, tomando no maior lado a parte $BE = AB$, e traçando A E, será isosceles o triangulo B A E; logo, $\wedge BEA = BAE$. Mas, considerando o triangulo A E C, o angulo externo $BEA > BCA$, portanto $\wedge BAE > BCA$, e com mais razão $BAC > BCA$ ou $BCA < BAC$. Assim pois, *sendo desiguaes dois lados de um triangulo, ao maior lado se oppõe maior angulo.*

Reciprocamente, é facil de vêr que *si dois angulos de um triangulo são desiguaes, ao maior se oppõe maior lado.*

Isto é, sendo $BAC > BCA$, será tambem $BC > BA$. Porque si B C não fosse maior do que A B, seria evidentemente menor ou igual, mas então, em vista do que dissemos precedentemente, o angulo A seria tambem menor ou igual ao angulo C, o que é contrario á hypothese estabelecida.

Advertencia. — Consideremos dois triangulos A B C e $A'B'C'$ nas mesmas condições do precedente, e vejamos si são iguaes quando se suppõe $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\wedge A = \wedge A'$ e $BC > AB$.

a) Supponhamos a principio que os dois triangulos são acutangulos (Fig. 20). Sendo $BC > AB$ e $B'C' > A'B'$, será, como vimos, $\wedge BCA < BAC$ e $B'C'A' < B'A'C'$. Como estes dois angulos C e C' são agudos, cairão dentro dos triangulos as perpendiculares B P e $B'P'$, baixadas respectivamente dos vertices B e B' sobre A C e $A'C'$, que os decompõem assim em dois triangulos rectangulos. Ora, é facil de vêr que os dois triangulos formados em A B C são iguaes res-

pectivamente aos de $A'B'C'$. Porque os primeiros ABP e $A'B'P'$ têm, por hypothese, $AB = A'B'$ e $\wedge A = \wedge A'$ (hypotenusa e um angulo agudo iguaes), de sorte que são iguaes, e portanto $BP = B'P'$. E quanto aos dois outros, BPC e $B'P'C'$, são tambem iguaes por terem os tres lados respectivamente iguaes, isto é, $BP = B'P'$, $BC = B'C'$, por hypothese, e, como estas obliquas iguaes se desviam igualmente do pé da perpendicular, será tambem $PC = P'C'$.

Da igualdade dos triangulos BPC e $B'P'C'$, conclue-se immediatamente que *são iguaes dois triangulos rectangulos que têm a hypotenusa e um catheto respectivamente iguaes.*

b) Si os triangulos dados forem obtusangulos, a sua igualdade resulta da que se verifica entre os triangulos rectangulos subtractivos que os formam Fig. 21 (I). O menor BPA é igual a $B'P'A'$, visto como $AB = A'B'$, por hypothese, e tambem $BAP = B'A'P'$, como supplementos dos angulos iguaes A e A'; dahi resulta que $BP = B'P'$. O outro triangulo BPC é tambem igual a $B'P'C'$, visto como $BP = B'P'$ e $BC = B'C'$, por hypothese (hypotenusa e um catheto respectivamente iguaes). Assim, pois, os triangulos obtusangulos dados são iguaes como differenças entre dois triangulos rectangulos respectivamente iguaes. Podemos portanto ainda uma vez concluir *que dois triangulos são iguaes quando têm respectivamente dois lados iguaes e igual o angulo opposto a um delles.*

O estudo das perpendiculares faz assim deduzir directamente este caso de igualdade dos triangulos, que, aliás, completa, como vimos, o segundo acima indicado, generalizando-o para a hypothese em que o angulo considerado é opposto a um dos dois lados, em vez de ser comprehendido por elles.

c) Observemos, porém, a respeito deste caso, que dois triangulos de especies diversas podem ter respectivamente dois lados iguaes e igual o angulo opposto a um delles, *sem que entretanto sejam iguaes.* E' o que se verifica, por exemplo, na Fig. 18, traçando ahi a obliqua $BE = BC$. O trian-

gulo obtusangulo A B C e o acutangulo A B E acham-se nestas condições; porque o $\wedge$ A e o lado A B são communs, e B E = B C. Os dois triangulos não são entretanto iguaes. Esse manifesto desaccordo com o segundo caso de igualdade dos triangulos pode ser evitado, enunciando-o do modo seguinte: *Dois triangulos da mesma especie são iguaes quando têm dois lados respectivamente iguaes, e igual um dos angulos não comprehendidos por elles.* Sendo assim expresso, não resta a menor duvida de que a igualdade não pode existir si um dos triangulos fôr obtusangulo e o outro acutangulo.

Note-se que esse desaccordo não poderia ter lugar si o lado B C opposto ao angulo A (Fig. 18) fosse igual ou maior que o outro lado A B.

Na primeira hypothese, só se poderia tirar do ponto B uma obliqua B E′= A B, e o triangulo assim formado não differiria do primeiro. E como de um mesmo lado da perpendicular B D não se pode tirar duas obliquas iguaes, o mesmo teria lugar si B E′ fosse maior que B A. As considerações precedentes deixam vêr que *dois lados e um angulo não comprehendido determinam um triangulo* de maneira a só lhe deixar uma unica forma *quando o angulo dado é recto ou obtuso*; porque em qualquer dessas hypotheses, similhante angulo fica necessariamente opposto ao maior dos lados dados. Mas, quando o angulo dado é agudo, é preciso verificar si elle é opposto ao menor ou ao maior dos lados dados. Na primeira hypothese, o triangulo determinado é, como vimos, susceptivel de duas formas differentes; ao passo que, na segunda, elle apenas comporta uma unica forma. Com effeito, supponhamos que o maior dos dois lados fica opposto ao angulo agudo. Si a uma recta qualquer A D (Fig. 22) se applica uma outra B D (igual ao menor dos lados dados), que faça com ella um angulo agudo B D A, igual ao proposto, não ha outro meio de fechar o triangulo, tendo dois lados respectivamente iguaes aos que foram dados e um angulo igual não comprehendido por elles, sinão tirando do ponto B sobre A D uma obliqua

B A igual ao maior dos lados dados. Mas do ponto B só se pode tirar sobre A D duas obliquas iguaes ao maior dos lados dados, isto é, B A e B E, de um e do outro lado da perpendicular B P. Os triangulos B D A e B D E são, pois, os unicos que podem encerrar os lados e os angulos dados. Ora, o primeiro B D A encerra effectivamente todos elles, porém o segundo B D E não possue nenhum angulo igual ao proposto, embora tenha dois lados, B D e B E, respectivamente iguaes aos dados: seu angulo D não é igual ao dado, mas sim o seu *supplemento;* e seus angulos B e E tambem não lhe são iguaes, sendo, porém, os interiores do triangulo D B E, em relação ao augulo externo dado, e cuja somma equivale a este angulo.

Portanto, com os dados da questão, se torna impossivel construir dois triangulos de especie differente.

Em resumo, pode-se dizer que um triangulo é determinado por dois lados e um angulo não comprehendido, de maneira a não ser susceptivel senão de uma unica forma, quando o angulo dado fica opposto ao maior dos lados dados, offerecendo, porém, duas formas diversas quando o angulo dado ficar opposto ao menor dos lados.

Observemos que, nesta ultima hypothese, os dois triangulos A B E e A B C (Fig. 18) são de tal natureza que $BEA = y'$ (segundo angulo não comprehendido de um) é da mesma grandeza que o supplemento de $BC = A = y$, segundo angulo não comprehendido do outro. Porque o triangulo C B E sendo isosceles, seu angulo B E C é igual ao seu angulo B C E, supplemento de B C A. Tem-se assim $y + y' = 2\,r$ e $y = B' + y'$ ou $y - y' = B'$, chamando B' a differença entre os angulos comprehendidos em B pelos lados conhecidos dos dois triangulos; combinando esta equação com a precedente, por somma e por subtracção, obtem-se, emfim, $y = \frac{2\,r + B'}{2}$ e $y = \frac{2\,r - B'}{2}$ ou $y = 1\,r + \frac{B'}{2}$ e $y' = 1\,r - \frac{B'}{2}$, o que mostra ser *obtuso* o angulo

não comprehendido do primeiro triangulo, e *agudo* o angulo não comprehendido do segundo.

Portanto, si dois triangulos tiverem dois lados respectivamente iguaes, e tambem igual um dos angulos não comprehendidos por elles, pode-se decidir da igualdade ou desigualdade desses triangulos, não só quando aquelle angulo fôr opposto ao maior dos lados, mas tambem quando o segundo dos angulos não comprehendidos fôr da mesma especie, num e no outro; porquanto acabamos de vêr que sendo desiguaes os dois triangulos, é caracter essencial dessa differença que o segundo angulo não comprehendido de um sendo obtuso, seja agudo o segundo angulo não comprehendido do outro.

Assim, pois, recapitulando todos os casos de igualdade dos triangulos, pode-se dizer *que dois triangulos são iguaes quando têm três dos seus elementos respectivamente iguaes*, sendo porém necessario para determinar um pelo outro: 1.° excluir o caso de três angulos dados; 2.° exigir que, si forem dados dois angulos, estejam elles collocados do mesmo modo em relação ao lado dado; 3.° admittir que, havendo dois lados iguaes e um angulo igual opposto a um delles, sejam os triangulos da mesma natureza, isto é, um e outro acutangulos, rectangulos ou obtusangulos; 4.° emfim, si forem dados os três lados, exigir que qualquer delles seja menor que a somma dos dois outros, ou maior que sua differença.

66 — Applicações. O traçado das perpendiculares, além do seu officio theorico, encontra na pratica interessantes applicações. A mais importante é a que se chama *methodo das perpendiculares ou ordenadas*, muito empregado na representação dos detalhes de uma localidade, ou mesmo de porções de terreno que por sua largura pouco consideravel não necessitam de *triangulada*.

Este methodo consiste em medir directamente sobre o terreno uma recta ou base OX (Fig. 23), e em baixar de todos os pontos notaveis do terreno perpendiculares sobre ella. As grandezas dessas perpendiculares e as distancias de seus pés

ao ponto fixo O, tomado sobre a base, determinam as posições dos vertices do polygono que deve representar a porção considerada de terreno supposto horizontal.

O methodo das perpendiculares só deve entretanto ser empregado para representar terrenos de pouca largura, porque do contrario exigiria muitas medidas directas de linhas rectas.

Pelo mesmo motivo evita-se sempre determinar um polygono medindo directamente todos os lados dos triangulos em que elle se decompõe. Em vez de recorrer-se assim ao 3.° caso da igualdade dos triangulos, prefere-se de ordinario utilizar os dois outros casos.

E' assim, por exemplo, que o 2.° e 1.° casos servem de base a dois processos para traçar uma planta: o 2.° a um conhecido pelo nome de *methodo de estacionamento ou radiamento*, e o 1.° a outro chamado *methodo de caminhamento*.

I. O methodo de radiamento consiste em tomar um ponto O (Fig. 24) no interior do terreno (que suppomos plano), e em medir directamente as distancias delle a todos os outros pontos principaes que o contornam, bem como os angulos consecutivos formados por estas distancias; isto é, as rectas OA, OB, OC e os angulos AOB, BOC, COD, etc. Para traçar estes angulos em sua justa medida, ha instrumentos especiaes chamados *goniographos*, dos quaes o mais usual é o *graphometro* (7 e). Pode-se traçar assim um polygono que representará a porção de terreno considerado; mas este methodo offerece ainda os inconvenientes do anterior e é impraticavel quando não se pode penetrar no interior do terreno. Para este caso é preferivel o methodo seguinte.

II. O methodo de caminhamento consiste em partir de um ponto determinado A (Fig. 25) e medir successivamente sobre o terreno as distancias AB, BC, CD... entre os pontos prin-

---

(7 e) Vêr nota B.

cipaes, bem como os angulos que ellas formam entre si em A B C... O polygono assim obtido representará a porção de terreno considerada, que para maior facilidade suppusemos plana. Para determinar a posição de um ponto isolado O, basta unil-o por uma recta a um dos vertices da linha polygonal, ou a um ponto qualquer F do contorno, e medir o comprimento O F, bem como o angulo A F O. Si qualquer obstaculo impedir a medida directa de um dos lados B C, por exemplo, tem-se ainda o recurso de medir o angulo A B C, e conhecendo já A B, bem como os angulos em A e B, poder-se-ha determinar B C. Este methodo, do mesmo modo que os anteriores, exige, como se vê, a medida directa de muitos comprimentos rectilineos. Por este motivo, é preferivel empregar o processo chamado de *intersecção*, que se baseia no 1.º caso de igualdade dos triangulos.

III. O *methodo de intersecção* consiste em medir, no interior do terreno que se quer representar, uma base ou recta P Q (Fig. 26) que, si for possivel, convirá ligar á *triangulada*. Em cada uma das extremidades desta base colloca-se o instrumento e, visando com elle os pontos principaes A, B, C..., medem-se os angulos A P Q, B P Q, C P Q, etc., bem como A Q P, B Q P, C Q P, etc. Traçando as intersecções dos lados destes angulos, determinam-se as posições dos vertices do polygono A B C D... que se deseja representar.

Como se vé, 'este methodo torna-se preferivel aos outros, pois evita a medição directa de um grande numero de distancias sobre o terreno, pelo que diminue muito o trabalho. Na sua applicação, convem collocar a base de tal sorte que não se chegue á determinação dos vertices do polygono pela intersecção de linhas que formem entre si angulos muito agudos ou muito obtusos. Porquanto na construcção da planta, as linhas graphicas irão confundir-se a partir do verdadeiro ponto de intersecção para um e outro lado, e por isso a posição exacta deste ponto, que é um dos vertices procurados, poderá ficar alterada si não se tiver em vista esta indicação.

Convirá, pois, que os triangulos obtidos se aproximem o mais possivel dos equilateros.

IV. Uma sufficiente generalização dos methodos precedentes permitte obter a medida indirecta de comprimentos de grande extensão, como por exemplo de um arco de meridiano, de parallelo, etc. Com effeito, seja AM (Fig. 27) a linha que se quer medir. Para isto, escolhe-se, á sua direita e á sua esquerda, uma serie de pontos ou estações B, C, D, E, F, G, H, que devem ser ligadas entre si e com as extremidades da linha geodesica considerada por meio de uma serie de triangulos ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, GHM, dos quaes se medem todos os angulos.

Isto feito, mede-se um dos lados AB do primeiro triangulo ou deduz-se o seu valor de uma base já medida com cuidado e desde então poder-se-ha conhecer os lados de todos os outros triangulos. Porque chamando I, K, L, P, Q, R as intersecções do meridiano proposto com os lados BC, CD, DE, EF, FG, GH, vê-se que são conhecidos, no triangulo ABI, o lado AB e os dois angulos adjacentes; pode-se pois determinar AI e BI, bem como o angulo em I. Conhecendo BC, basta subtrahir BI para obter IC. No triangulo ICK, conhece-se então um lado IC e os dois angulos adjacentes; pode-se, pois, determinar IK, KC e o angulo em K. Conhecendo DC, basta subtrahir KC para ter DK. No triangulo DKL, conhece-se então um lado DK e os dois angulos adjacentes; pode-se, portanto, obter KL, DL e o angulo em L. Continuando deste modo, chegar-se-ha a determinar successivamente todas as partes AI, IK, KL, LP, PQ, QR e RM do arco considerado, e fazendo a somma ter-se-ha o seu comprimento.

Existem outros methodos para medir um arco de meridiano ou de parallelo; citámos o mais elementar, devido ao geometra hollandez Snellius, que pela primeira vez effectuou uma operação desse genero, logo depois praticada em França por Picard e outros.

100 — Uma conveniente applicação da igualdade dos trian-

gulos permitte deduzir facilmente a igualdade de polygonos quaesquer, visto esta se reduzir sempre á dos triangulos componentes.

Resulta, com effeito, que *dois polygonos são iguaes quando podem ser decompostos no mesmo numero de triangulos respectivamente iguaes, dispostos do mesmo modo*; e, reciprocamente, que *dois polygonos susceptiveis de serem decompostos no mesmo numero de triangulos respectivamente iguaes e collocados do mesmo modo, serão necessariamente iguaes.*

Esta igualdade pode ser verificada, directamente, superpondo os dois polygonos, quer sejam os seus triangulos fechados pelas $n-3$ diagonaes tiradas de um dos n vertices para os outros, ou por linhas tiradas de um ponto interior para todos os vertices. Vê-se então que a coincidencia desses vertices basta por si só para provar a igualdade dos dois polygonos, porque ella importa na igualdade dos lados e angulos respectivos.

E' assim, por exemplo, que *conhecendo-se todos os lados de um polygono menos um só* $(n-1)$, *e conhecendo-se tambem os angulos comprehendidos entre os lados dados* $(n-2)$, *fica o polygono determinado, e se pode construil-o.*

Com effeito; si no polygono ABCDE (Fig. 25) conhecermos os lados AB, BC, CD, DE, e os angulos que elles comprehendem, poderemos sobre $A'B' = AB$ fazer o angulo $A'B'C' = ABC$; depois, tomaremos $B'C' = BC$, e faremos no ponto C′ sobre B′C′ o angulo $B'C'D' = BCD$; tomaremos em seguida $C'D' = CD$, e faremos no ponto D′ sobre C′D′ o angulo $C'D'E' = CDE$; finalmente tomaremos $D'E' = DE$. Tendo assim chegado ao ponto E′, não haverá mais do que uma maneira de ligal-o com o ponto A′, e *fechar* o polygono A′B′C′D′E′.

E' claro que este polygono será igual, em todas as suas partes, ao polygono ABCDE; porque si levarmos, a partir deste ultimo ponto, A′B′ sobre AB, por causa da igualdade dos

angulos ABC e $A'B'C'$, o lado $B'C'$ cairá sobre o seu igual BC; continuando assim successivamente reconheceremos que os pontos A', B', C', D' e E' cairão respectivamente sobre os pontos A, B, C, D e E: donde se segue que os dois polygonos coincidirão perfeitamente.

Advirtamos que ha outros muitos casos de igualdade entre dois polygonos (7 f). No precedente quisemos sómente dar um exemplo desta igualdade, para mostrar que um polygono de um numero qualquer n de lados, e que por consequencia contém um numero n de angulos, o que faz ao todo $2n$ elementos, é determinado pelo conhecimento de $2n-3$ desses elementos. Porque, tirando de um dos vertices as diagonaes para todos os outros, obtem-se como vimos $n-2$ triangulos, e como cada um destes exige apenas 3 elementos para ser determinado, teremos ao todo $3(n-2)=2n-6$ condições para a determinação do polygono. Como, porém, se acham neste numero as $n-3$ diagonaes que não precisam ser determinadas, o numero total de elementos distinctos se reduzirá a $3n-6-(n-3)=3n-6-n+3=2n-3$. Notemos aqui, como deveriamos advertir nos differentes casos de igualdade de triangulos, que os n angulos não se devem cortar senão por $n-1$ dados, porque a sua somma é sempre conhecida.

Dahi resulta que si forem dados n lados, bastará conhecer $n-3$ angulos para determinar o polygono; porque sendo $2n-3$ a totalidade dos elementos necessarios para tal determinação, é claro que subtrahindo n deste numero, virá: $2n-3-n=n-3$.

Si forem dados $n-1$ angulos, bastará conhecer $n-2$ lados; visto como $2n-3-(n-1)=n-2$.

(7 f) Assim, por exemplo, conforme resulta da quarta applicação do n.º precedente, vê-se que *dois polygonos são iguaes quando têm os seus vertices determinados por triangulos respectivamente iguaes, possuindo uma base commum em ambas as figuras.*

Assim, pois,

	a n lados corresponde $n-3$ angulos;
	» $n-1$ lados corresponde $n-2$ angulos;
e	» $n-2$ » » $n-1$ »

Tendo apreciado de um modo geral as condições que determinam os polygonos, quer sejam elles regulares, symetricos ou mesmo irregulares, torna-se facil conhecer outras propriedades. E' assim que em qualquer polygono se pode sempre obter a somma dos angulos internos por meio dos triangulos em que se decompõe.

Tirando, com effeito, de um dos vertices as diagonaes para todos os outros não consecutivos, já vimos que o polygono se decompõe em tantos triangulos quantos são os lados menos dois. Ora, cada triangulo valendo dois angulos rectos, torna-se evidente que *a somma dos angulos internos de qualquer polygono convexo é igual a tantas vezes dois angulos rectos quantos são os lados menos dois.*

Da propriedade precedente resulta que, prolongados todos os lados no mesmo sentido, *a somma dos angulos externos é igual a quatro rectos.* Porque cada angulo externo com o interno adjacente vale em somma $2\wedge$ rectos; de sorte que a totalidade dos externos com os internos é n vezes $2\wedge$ rectos. Assim, pois, chamando s' a somma dos externos e s a dos internos, teremos $s' + s = 2n$ rectos; como, porém, vimos ser $s = 2(n-2) = 2n - 4$, virá, por substituição,

$$s' + 2n - 4 = 2n,$$

donde $$s' = 2n - 2n + 4 = 4\wedge \text{ rectos.}$$

Desta segunda propriedade resulta que um polygono convexo não póde ter mais de 3 angulos agudos: porque se tivesse 4, sómente a somma dos 4 angulos externos correspondentes excederia a 4 rectos. Da primeira propriedade resulta

tambem a possibilidade de obter a expressão de um dos angulos internos de qualquer polygono equiangulo. Porque chamando α o valor desse angulo, e n o numero total de lados ou de angulos do polygono, ter-se-ha evidentemente

$$\alpha = \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n}.$$

Esta expressão deixa vêr que *em todo polygono equiangulo de mais de quatro lados, todos os angulos são obtusos, e que no de quatro lados todos os angulos são rectos.* Este polygono equiangulo, que se torna *regular* por ser tambem equilatero, é o *quadrilatero* que se denomina *quadrado*, para se distinguir dos outros *quadrilateros* symetricos, isto é, daquelles em que sómente os lados oppostos são iguaes. Denominam-se quadrilateros *symetricos* aquelles em que não são iguaes todos os lados entre si, mas sómente os que se acham dispostos do mesmo modo em relação ás diagonaes. Todos os quadrilateros que têm os lados oppostos parallelos, são chamados parallelogrammos. Delles nos occuparemos no § seguinte. (7 g)

(7 g) O acrostico deste paragrapho, o primeiro do preambulo geral, é dedicado a Clairaut como homenagem especial ao unico dos grandes geometras que aperfeiçoou o ensino mathematico antes do advento do Positivismo. «O principal constructor da mecanica celeste (Recueil des mémoires sur les monvements des corps célestes — 1740) não desdenhou abrir a sua nobre carreira elaborando o melhor tratado didactico sobre a geometria preliminar (E'lements de Geométrie — 1741). Afastando pela primeira vez o empirismo classico, elle fez dignamente sobresair a filiação logica das principaes noções estabelecidas na antiguidade. Rapidamente alterado pela anarchia academica esse esboço da regeneração didactica preparou especialmente o seu advento systematico. Via-se esse impulso fracamente prolongado por dois geometras secundarios, um mais pratico e mais synthetico (Lacroix), o outro mais theorico e mais analytico (Legéndre), depois dos quaes o ensino mathematico se degradou continuamente, até a sua renovação universal». (Augusto Comte — *Synthèse Subjective*)

Alem das obras citadas deve-se a Clairaut o *Traité de l'équilibre de la Lune* (1743) ; *Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction* (1752); *Tables de la Lune* (1754) ; *Théorie des mouvements des comètes, avec l'application de cette théorie a la comète qui a été observée dans les années* 1531, 1607, 1682, 1759. (1760) ; *Mémoires sur l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre* (1761) ; *Recherches sur les courbes à double courbure* (1731) e *E'léments d'Algèbre*, obra muito recommendavel.

Clairaut (Alexis Claude) nasceu em Paris a 7 de maio de 1713, onde seu pai era professor

de mathematica. Sob a direcção deste elle fez tão rapidos progressos em taes estudos que, apenas com 12 annos e 8 mezes, leu perante a Academia Franceza uma memoria sobre as propriedades de 4 curvas que havia descoberto. Com a idade de 16 annos, apenas, acabou o tratado sobre as *curvas de dupla curvatura*, o qual sendo publicado 2 annos mais tarde lhe proporcionou a sua admissão na mesma Academia, apesar de não haver ainda attingido a idade legal. Em 1736, juntamente com o seu amigo Maupertins tomou parte na famosa expedição a Lapland, a qual tinha por fim medir um grau do meridiano, e na volta publicou o seu tratado sobre a *figura da Terra*. Nesse trabalho elle dá o seu theorema a respeito da variação da gravidade. Obteve uma solução engenhosa e muito aproximada do problema dos 3 corpos; em 1750 ganhou o premio da Ac. de S. Petersburgo, pela sua memoria sobre a Theoria da Lua. Em 1759 calculou o perihelio do cometa de Halley. Falleceu em Paris em 17 de maio de 1765.

§ 8.º

Quadrilateros symetricos e especialmente os de lados parallelos; caracter geral do parallelismo das rectas: theoria das parallelas

101 — Caracter do parallelismo de duas rectas, e sua deducção da lei de Thales. Comquanto os quadrilateros symetricos, sobretudo os de lados parallelos, gozem das propriedades geraes inherentes a todos os polygonos, o seu estudo especial torna-se necessario em virtude das multiplas applicações de que são susceptiveis, principalmente nas artes da fórma — *architectada, esculpturada e pintada.*

Antes, porém, de iniciar a apreciação dos quadrilateros de lados parallelos, precisamos examinar detidamente em que consiste de facto o *parallelismo* de duas rectas.

Sabemos que duas linhas se dizem *parallelas* quando são equidistantes em toda a sua extensão; de sorte que duas ou mais rectas parallelas não podem concorrer para um mesmo ponto, por isso que têm a mesma direcção. E' o que, aliás, deixa vêr o sentido etymologico do termo; porque *parallela* vem do grego *parallêlos*, onde se forma de *para*, ao lado ou ao longo, e de *allêlos*, um e outro. Comprehende-se, porém, que similhante propriedade tem o inconveniente de exigir muitas vezes, para a sua verificação, que as rectas propostas sejam prolongadas; porquanto pode acontecer que a sua inclinação mutua seja tão pequena que não se torne perceptivel. Dahi resulta, pois, a necessidade de instituir-se um caracter

CIRODDE

geometrico que deixe immediatamente perceber si as rectas consideradas são parallelas ou não.

Um tal caracter póde ser obtido inductivamente: a observação nos mostra, com effeito, que duas linhas parallelas são igualmente inclinadas sobre qualquer recta que as corte. E' isto que se vê, por exemplo, ligando no terreno os pontos assignalados pelos pés de duas palmeiras ou de duas arvores quaesquer de troncos verticaes. Tem-se abstractamente um idéa muito simples do parallelismo, imaginando sobre uma mesma recta duas perpendiculares. Estas serão necessariamente parallelas, isto é, equidistantes em toda a sua extensão; porque si não o fossem, encontrar-se-iam num ponto, e teriamos então desse ponto para a mesma recta, duas perpendiculares a ella, o que vimos ser impossivel. E note-se neste caso que, de accordo com o caracter acima indicado, estas duas parallelas são igualmente inclinadas de 90° sobre a recta em questão.

Destarte, vê-se que a verificação do parallelismo fica reduzida immediatamente a constatar si as rectas propostas fazem ou não angulos iguaes com qualquer transversal que as corte, contanto que essas inclinações sejam sempre apreciadas no mesmo sentido.

Ao envés de exprimir logo esta noção tão directa e intuitiva, Euclides (8 a) e os seus successores classicos, tiveram a

---

(8 a) Vide *Elementos de Euclides*: Os seis primeiros livros do undecimo e duodecimo da versão latina de Frederico Commandino, addicionados e illustrados pelo professor inglez Robert Simpson, foram traduzidos para o portuguez (Lisboa — 1855). Eis o juizo de A. Comte a respeito de Euclides: «... um theorico que, sem ser original, apresenta alguma importancia historica, como typo espontaneo de uma certa positividade. Só o apparecimento de um tratado didactico, digno fructo inicial da instituição alexandrina, provará assás a consistencia decisiva e a estima universal já adquirida pela *geometria*. Mas, a composição de Euclides indica tambem a difficil existencia dos verdadeiros pensadores, então forçados a elaborar a sciencia num, meio profundamente sophistico. Foi para garantir a pureza do raciocinio geometrico das subtilezas dos dialecticos, que este estimavel professor empregou precauções muito minuciosas, cuja empirica imitação se tornou logo inescusavel Todavia si elle fosse mais eminente, teria podido já preencher uma tal condição sem alterar o verdadeiro espirito das descobertas, cujo encadeamento devia ser então mais facil de manifestar que de dissimular » Polit. Posit. t. III

absurda pretenção de precisal-a mais, substituindo-a por um principio negativo que consiste em admittir que *a perpendicular e a obliqua a uma recta se encontram á fortiore, sendo prolongadas sufficientemente.* (Postulado de Euclides). E' evidente que uma concepção tão simples não exigia que o geometra didactico da antiguidade estabelecesse esse *postulatum*, assim chamado por servir de principio fundamental á sua theoria das parallelas. Seria preferivel que admittisse logo como *axiomas, que uma recta tem a mesma direcção em todo o seu comprimento, e que um angulo indica a differença entre duas direcções; que duas rectas parallelas são aquellas que têm a mesma direcção, e que por consequencia duas rectas parallelas são igualmente inclinadas em relação a uma outra recta qualquer que as córte.*

Todavia, é facil de ver que a theoria das parallelas não necessita de nenhm *postulado* para ser instituida. O caracter geral do parallelismo, donde resultam todas as propriedades essenciaes de similhantes rectas, pode ser deduzido immediatamente da primeira lei de Thales, como passamos a mostrar.

Deducção do caracter de parallelismo de duas rectas. Consideremos os triangulos A B C, A B C_1, A B C_2,... (Fig. 29) que têm o mesmo lado A B. Como a somma dos três angulos de qualquer triangulo é constantemente igual a 2 $\wedge$ rectos, segue-se que crescendo continuamente os angulos adjacentes A e B, será preciso que o angulo opposto ao lado A B decresça successivamente. Portanto, para um triangulo cujo vertice C_n esteja a uma distancia infinitamente grande do lado opposto A B, o angulo em C_n será infinitamente pequeno; e de conformidade com o principio fundamental do methodo infinitesimal (63), poderá esse angulo ser desprezado em presença dos angulos adjacentes A e B, *cuja somma valerá então dois angulos rectos.* Teremos, pois, neste caso

$$\wedge A + \wedge B = 180.^\circ,$$

quando as rectas A C e B C se tornarem parallelas. Esta propriedade serve de lemma á *theoria das parallelas*. Com effeito, prolongando A B até E, vê-se que o angulo E B D sendo supplementar de A B D (Fig. 30) será tambem

$$EBD + ABD = 180.^{\circ},$$

donde resulta que $\wedge$ C A B = E B D, isto é *que as duas rectas paralellas A C* e *B D são igualmente inclinadas sobre a transversal A E.*

Para apreciar as consequencias que resultam deste caracter do parallelismo, prolonguemos a transversal A E até F, assim como respectivamente as rectas A C e B D até C′ e D′. (Fig. 30). Os angulos A e α, que correspondem á inclinação commum das duas parallelas C C′ e D D′, um interno e outro externo a ellas, são chamados *correspondentes;* este nome tambem é dado aos seus iguaes e oppostos pelos vertices A e B, isto é, a A′ e α', bem como aos angulos B e β, B′ e β' que medem, tambem em sentido opposto, a inclinação commum das mesmas parallelas.

Da igualdade dos angulos *corespondentes* ou *internos* e *externos*, resulta immediatamente a dos angulos internos e alternados, A e α', B e β', situados de um e de outro lado da transversal e entre as parallelas, sendo chamados por isto *alternos-internos;* porque cada um delles é igual a um correspondente que lhe é opposto pelo vertice. Pela mesma razão, tornam-se iguaes os angulos externos α e A′, β e B′ que, situados alternadamente de um e de outro lado da transversal e fóra das parallelas, são chamados por isso *alternos-externos.*

Emfim, a relação $\wedge A + \wedge B = 180.^{\circ}$ nos tendo mostrado que são supplementares os angulos internos A e B situados de um mesmo lado da transversal, deduzimos dahi que são tambem supplementares os angulos internos do outro lado, bem como os externos que lhes são respectivamente oppostos pelos vertices.

Resumindo tudo o que precede, pode-se, pois, dizer que duas rectas parallelas formam com uma transversal:

1.º *angulos internos do mesmo lado supplementares;*
2.º *angulos correspondentes iguaes;*
3.º *angulos alternos-internos iguaes:*
4.º *angulos alternos-externos iguaes:*
5.º *angulos externos do mesmo tado supplementares.* (8 b).

Corollarios. Das igualdades precedentes deduzem-se estas consequencias:

I. Que *são iguaes os angulos cujos lados têm a mesma direcção e os mesmos sentidos* (angulos correspondentes), bem como *os angulos cujos lados têm a mesma direcção em sentidos oppostos* (alternos-internos e alternos-externos).

II. As mesmas igualdades nos mostram que *são supplementares os angulos cujos lados têm a mesma direcção, quando dois lados são respectivamente dirigidos no mesmo sentido e*

(8 b) Tal é o modo pelo qual, segundo A. Comte, se pode deduzir da lei de Thales o caracter geral do parallelismo de duas rectas. Além da vantagem de ligar immediatamente a theoria das parallelas á dos triangulos, esta marcha nos offerece, como vimos, uma segunda applicação do principio que serve de base ao methodo infinitesimal. Suppondo que um dos vertices do triangulo se acha situado a uma distancia infinitamente grande do lado opposto, é evidente que os dois lados correspondentes formarão entre si um angulo infinitamente pequeno, que por isso podemos desprezar, em presença dos dois outros angulos finitos Assim, pois, quando duas rectas se encontram a uma distancia infinitamente grande de nós, podemos consideral-as como parallelas. Nestas condições se acham, por exemplo, dois raios luminosos que nos vêm de uma estrella ou do sol, etc.,... os quaes, pelo seu immenso afastamento, podem ser olhados como parallelos. E esta concepção foi expressa por Varignon, de um modo abreviado, dizendo que *duas parallelas se encontram no infinito, fazendo entre si um angulo nullo.* Veremos adiante a utilidade pratica dessa concepção, quando se trata de representar sobre um plano a superficie do nosso planeta ou a parte apparente de um astro. Suppondo um observador collocado neste, é evidente que os raios visuaes dirigidos para aquelle podem ser tidos como parallelos, em virtude da grande distancia do ponto de vista. Reciprocamente, é facil de verificar que duas rectas parallelas de grande extensão nos apresentam a *perspectiva* de concorrerem para um ponto, como se pode vêr observando os trilhos de uma via ferrea, uma rua de grande extensão, etc...

os dois outros em sentido contrario (angulos internos ou externos do mesmo lado, angulos adjacentes). Esta conclusão e a precedente podem ser resumidas, dizendo-se simplesmente que *são iguaes dois angulos de lados parallelos, quando estes são dirigidos no mesmo sentido, ou em sentido contrario;* e que *são supplementares quando dois delles são dirigidos no mesmo sentido e os outros dois em sentido contrario.*

III. As mesmas igualdades nos deixam ainda ver que *duas parallelas têm perpendiculares communs.* Porque si a perpendicular a uma das parallelas não o fosse tambem á outra, não teriam ellas a mesma inclinação sobre a perpendicular, e portanto deixariam de ser parallelas.

IV. As mesmas igualdades mostram tambem que *por um ponto fora de uma recta não se lhe pode traçar mais de uma parallela.* Porque se isso fosse possivel, baixando desse ponto uma perpendicular sobre a recta considerada, esta o seria tambem ás parallelas traçadas, e ter-se-ia então naquelle ponto mais de uma perpendicular á mesma recta, o que vimos ser impossivel.

V. Duas parallelas gozam sempre das cinco propriedades acima indicadas, e quando qualquer dellas se verifica a respeito de duas rectas, estas são parallelas; dahi se conclue que as rectas em que não tem lugar nenhuma destas propriedades não são parallelas.

Por exemplo, duas rectas DE e FG (Fig. 31), perpendiculares a duas outras AB e DC que se encontram, não são parallelas; pois si tirarmos a transversal GE, que liga as intersecções G e E das perpendiculares, é claro que a somma dos angulos DEG e FGE, internos do mesmo lado, é menor que a dos dois angulos rectos DEB e FGB. Assim, pois, *quando duas rectas se encontram, as suas perpendiculares tambem se encontram.* E note-se mais que *os dois angulos, um agudo e outro obtuso, que têm os lados perpendiculares, são necessariamente supplementares;* porque no quadrilatero formado pelos seus lados, a somma dos angulos internos é quatro rectos,

e como dois desses angulos são formados pelas perpendiculares, torna-se evidente que os outros dois são supplementares.

Si os dois angulos, B e D, *de lados perpendiculares forem ambos agudos* (Fig. 32), *é facil verificar que são iguaes como complementos de angulos iguaes*, $F = F'$, isto é:

$$D + F = 90^\circ \text{ e } B + F = 90^\circ, \text{ donde } B = D$$

Reciproca. Si duas rectas, cortadas por uma transversal, satisfizerem a qualquer das cinco condições acima indicadas, satisfarão necessariamente ás quatro outras, e serão parallelas.

Supponhamos a principio duas rectas, D E e F G, que fazem com uma terceira H I, e do mesmo lado relativamente a esta, os angulos iguaes E M H e G L H (Fig. 33), um dentro e outro fóra, e mostremos que estas duas rectas são parallelas.

Para isto, baixemos do ponto K, meio de L M, a perpendicular K P sobre D E, e a prolonguemos até encontrar F G no ponto Q. Formamos os triangulos M P K e L Q K, iguaes entre si por terem um lado igual adjacente a dois angulos respectivamente iguaes, porque segundo a hypothese, o angulo K M P ou E M H é igual ao angulo K L Q, opposto pelo vertice a G L H, o angulo M K P é igual a L K Q por construcção, e $MK = KL$. Logo, o angulo K Q L será igual á M P K, e por consequencia recto. Portanto, *as duas rectas* D E *e* F G, *sendo ambas perpendiculares á mesma recta* P Q, *serão parallelas entre si.*

Os angulos que suppusemos iguaes foram aquelles a que chamamos *correspondentes*. Si admittirmos que a igualdade existe entre dois quaesquer dos que denominámos *alternos-internos* ou *alternos-externos*, a questão reduz-se á precedente substituindo um desses angulos pelo que lhe é verticalmente opposto. Emfim, na hypothese de serem supplementares os angulos internos ou externos do mesmo lado da transversal, a questão reduz-se ainda ao caso da igualdade dos angulos correspon-

dentes. Além disto si E M I = G L H e portanto igual a 90°, as duas rectas serão perpendiculares á transversal, e dahi resulta que *duas perpendiculares a uma mesma recta são parallelas*. Porque designando por E e E′ os angulos externos e por C e C′ os correspondentes que lhes são respectivamente adjacentes, teremos, por hypothese, $E + E' = 2 \wedge$ rectos; e como $C + E = 2 \wedge$ rectos, por serem adjacentes, virá $E + E' = C + E$ ou $E' = C$; e ainda por ser $C' + E' = 2 \wedge$ rectos, será tambem $E + E' = C' + E'$ ou $E = C'$.

102 — INSTITUIÇÃO DEDUCTIVA DOS CARACTERES PROPRIOS AOS QUADRILATEROS SYMETRICOS. Resultam das propriedades precedentes os caracteres proprios aos quadrilateros de lados parallelos, symetricos ou não. São elles o *trapezio* e o *parallelogrammo* que pode ser por sua vez *rectangulo*, *quadrado* ou *losango*. Sabemos que o trapezio (do grego *tetra peza*, quatro pés) é o polygono de quatro lados, de que dois são parallelos, chamando-se ainda *isosceles* si os outros dois lados forem iguaes, e *rectangulo* si um destes fôr perpendicular áquelles. O parallelogrammo (do grego *parallelos* parallela, e *gramma* linha) é o polygono de quatro lados que são parallelos dois a dois. O *parallelogrammo* que tem os quatro angulos rectos denomina-se *rectangulo*, que toma por sua vez o nome de *quadrado* quando os quatro lados são iguaes. O parallelogrammo cujos quatro lados são iguaes, mas onde os quatro angulos são obliquos, denomina-se *losango* (do grego *loxos* obliquo, e do latim *angulus* angulo). Este parallelogrammo tambem se chama *rhombo*, e quando o quadrilatero tem sómente iguaes os lados consecutivos dois a dois, dá-se-lhe o nome de rhomboide. Caracterizemos successivamente cada uma destas especies de polygonos.

I. *Em todo parallelogrammo:* a) *são supplementares os dois angulos adjacentes a cada lado, e iguaes os angulos oppostos;* b) *são iguaes os lados oppostos;* c) *suas diagonaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes.*

Com effeito, seja o parallelogrammo A B C D (Fig. 34): a) Dois angulos consecutivos são ahi supplementares por se

acharem do mesmo lado de uma transversal cortando duas parallelas. Dois angulos oppostos são sempre iguaes pois sendo $A + B = 2r$, e $B + C = 2r$, resulta: $A + B = B + C$, donde $A = C$. b) Dois lados oppostos quaesquer, A B e C D, por exemplo, são sempre iguaes entre si. Porque traçando a diagonal B D, são iguaes os triangulos A B D e B C D, por terem o lado commum B D, adjacente a angulos iguaes, a saber: $\wedge$ A D B = $\wedge$ D B C como alternos-internos das parallelas A B e C D e da transversal B D, e $\wedge$ A B D = B D C como alternos-internos em relação ás mesmas parallelas e á transversal B D. Sendo iguaes os dois triangulos, conclue-se que A B = C D, e A D = B C, como lados oppostos a angulos respectivamente iguaes.

Como os lados oppostos do quadrilatero são parallelos, por hypothese, esta demonstração nos deixa ver que *partes de parallelas comprehendidas entre parallelas são iguaes.*

c) Cada uma das diagonaes A C e B D é cortada pela outra, no ponto O, em duas partes iguaes. Porque os dois triangulos A O B e D O C têm um lado igual, adjacente a dois angulos iguaes, a saber: A B = C D como lados oppostos do parallelogrammo; $\wedge$ B A O = $\wedge$ O C D como alternos-internos em relação ás parallelas A B e C D cortadas pela transversal A C; e $\wedge$ O B A = $\wedge$ O D C como alternos-internos em relação ás mesmas parallelas cortadas por B D. Assim, pois, são iguaes os dois triangulos A O B e C O D, e por conseguinte o lado O B, opposto ao $\wedge$ O A B, é igual ao lado O D, opposto ao $\wedge$ O C D, e o lado O A, opposto ao $\wedge$ O B A, é igual ao lado opposto ao $\wedge$ O D C.

Reciprocamente, um quadrilatero é um parallelogrammo:

a) *si os lados oppostos são iguaes e parallelos. dois a dois;*
b) *si seus angulos oppostos são iguaes dois a dois;*
c) *si duas diagonaes se cortam mutuamente em duas partes iguaes;*

a) Com effeito, são iguaes os triangulos A B D e B C D por terem o lado B D (Fig. 34) commum, o lado A B = C D por hypothese, e ∧ A B D = B D C por causa das parallelas A B e C D em relação á transversal B D (dois lados iguaes e igual o angulo comprehendido). Da igualdade dos triangulos, conclue-se que A D = B C, e que estas rectas são parallelas, por ser o ∧ A D B = ∧ D B C: logo a figura é um parallelogrammo. b) Os angulos oppostos A e C sendo iguaes entre si, assim como os angulos B e D, vê-se que dois angulos consecutivos quaesquer, B e C, por exemplo, têm uma somma igual á metade da somma dos angulos do quadrilatero, isto é, a dois ∧ rectos. Estes dois angulos B e C sendo supplementares, e alem disto internos do mesmo lado relativamente ás duas rectas A B e C D, cortadas por B C, concluimos que estas duas linhas são parallelas. Do mesmo modo demonstrariamos que sendo os angulos A e B supplementares, os dois outros lados, A D e B C, são parallelos. Logo o quadrilatero A B C D é um parallelogrammo. c) Desde que se supponha O A = O C e O B = O D, os angulos A O B e C O D sendo alem disso iguaes como oppostos pelo vertice, segue-se que os dois triangulos A O B e C O D são iguaes. Portanto ∧ O A B = ∧ O C D. Ora, estes angulos iguaes sendo alternos-internos em relação ás rectas A B e C D cortadas por A C, segue-se que os lados oppostos A B e C D são parallelos. Da igualdade dos triangulos A O D e B O C, deduziriamos similhantemente a igualdade dos angulos O A D e O C B, e por conseguinte o parallelismo dos dois outros lados oppostos A D e B C. O quadrilatero A B C D, tendo os seus lados oppostos parallelos dois a dois, é, pois, um parallelogrammo.

II. *Todo rectangulo é um parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes, e reciprocamente todo parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes é um rectangulo.*

Com effeito, notemos em primeiro lugar que todo rectangulo é um parallelogrammo, porque seus angulos oppostos são iguaes como rectos. Em segundo lugar, os dois triangulos

DAB e BCD (Fig. 35), por exemplo, são iguaes por terem um angulo igual comprehendido por dois lados iguaes, isto é, $\wedge DAB = \wedge BCD$, os lados AB e CD bem como AD e BC iguaes como lados oppostos de um parallelogrammo; por conseguinte, tirando a diagonal AC, vê-se que ella é igual a BD, como hypotenusas dos triangulos rectangulos iguaes DAB e ABC.

Reciprocamente, si duas diagonaes de um parallelogrammo forem iguaes, será elle um rectangulo, visto como os dois triangulos ABD e ABC são iguaes por terem os três lados respectivamente iguaes, a saber: as duas diagonaes, por hypothese, AB commum, e $AD = BC$ como lados oppostos de um parallelogrammo. Portanto, $\wedge DAB = BCD$, e do mesmo modo se mostrará que $\wedge ABC = ADC$; e por ser cada um delles igual ao seu opposto, vê-se que o parallelogrammo considerado tem todos os angulos iguaes. Ora, a somma desses angulos valendo quatro rectos, segue-se que cada um delles é igual a um angulo recto, e que por conseguinte o parallelogrammo considerado é um rectangulo.

III. *Todo quadrado é um parallelogrammo cujas diagonaes são iguaes, perpendiculares entre si, e bissectrizes dos angulos oppostos.*

Reciprocamente, *todo parallelogrammo é um quadrado quando suas diagonaes são:*

a) *iguaes e perpendiculares entre si;*
b) *iguaes e uma dellas sendo, além disso, bissectriz dos angulos cujos vertices liga.*

A demonstração destas duas proposições não offerece nenhuma difficuldade.

IV. *Todo losango é um parallelogrammo cujas diagonaes são desiguaes, perpendiculares uma á outra, e bissectrizes dos angulos oppostos.*

Em primeiro lugar, todo losango é um parallelogrammo porque seus lados oppostos são iguaes.

Em segundo lugar, os triangulos A B C e A D C (Fig. 36) sendo isosceles, visto como os quatro lados de um losango são iguaes, a diagonal B D que passa pelo meio O da diagonal A C é ao mesmo tempo perpendicular sobre A C e bissectriz dos angulos B e D. Por um motivo analogo, a diagonal A C é bissectriz dos angulos A e C. Note-se, emfim, que estas diagonaes são desiguaes, porque ficam oppostas a angulos desiguaes nos dois triangulos a que pertencem.

Reciprocamente, *todo parallelogrammo é um losango quando suas diagonaes são desiguaes e perpendiculares uma á outra, ou si qualquer dellas é bissectriz dos angulos cujos vertices liga;* o que facilmente se demonstra.

V. Por analogia com o losango ou rhombo, chamou-se rhomboide (do grego *rhombos* rhombo, e *eidos* similhança) ao quadrilatero symetrico onde apenas são iguaes dois a dois os lados consecutivos e dois dos angulos oppostos (Fig. 37). Não participa das propriedades do parallelogrammo, porque todos os lados e angulos oppostos não são iguaes respectivamente. Distingue-se especialmente do losango porque, das diagonaes, embora perpendiculares, sómente uma é bissectriz dos angulos cujos vertices liga (8 c), sendo, aliás, dividida pela outra em duas partes desiguaes.

103 — Resultados do primitivo estudo do trapezio pelos geometras da escola de Mileto: propriedades da parallela á base de um triangulo. O quadrilatero chamado *trapezio*, isto é, aquelle em que sómente dois lados oppostos são parallelos, pode ser *escaleno*, *isosceles* ou symetrico, e *rectangulo*, conforme os dois lados não parallelos são desiguaes, iguaes ou um delles

---

(8 c) A denominação de *rhomboide* tem sido dada impropriamente aos corpos fechados cujas faces são *rhombos* ou *losangos*: devem, porém, ser chamados *rhomboedros*. Os antigos tambem denominavam rhomboides os parallelogrammos de angulos obliquos tendo sómente iguaes os lados oppostos, ao envés de todos elles como no *losango*.

perpendicular aos lados parallelos. Chama-se *linha mediana do trapezio* a recta que une os meios dos lados não parallelos.

Consideremos um trapezio escaleno A B C D (Fig. 38), e por um ponto qualquer F do lado transversal A B, tracemos F E parallelamente á base A D, e por conseguinte tambem á outra base B C. *Estas três parallelas*, A D, F E e B C, *cortam sempre os dois lados transversaes*, A B e C D, *em partes proporcionaes;* isto é, A F : F B : : D E : E C.

Demonstração. Dois casos podem ter lugar: 1.º que A F seja commensuravel com A B; isto é, que a razão de A F para A B se possa exprimir exactamente por dois numeros.

Supponhamos, por exemplo, que temos

A B : A F : : m : n;

isto é, si concebermos a recta A B dividida em *m* partes iguaes, A F conterá *n*, e F B terá m—n. Tirando depois por todos os pontos de divisão, parallelas a A D, a recta D C se achará dividida em *m* partes iguaes, das quaes *n* comporão D E, e m—n comporão E C; portanto teremos

A F : F B : : n : m—n e D E : E C : : n : m—n

donde se segue A F : F B : : D E : E C.

Demais, em consequencia das proporções

A B : A F : : m : n e D C : D E : : m : n

teremos tambem A B : A F : : D C : D E.

Notemos, de passagem, que as partes assignaladas em C D pelas parallelas tiradas pelos pontos de divisão de A B são todas iguaes entre si, embora em geral differentes das partes de A B. E' o que se pode ver traçando, por exemplo, as parallelas E F, G H, K L e M N (Fig. 39), e tirando pelos pontos

C, L, H, E e N as rectas Cc, Ll, Hh, Ee, e Nn parallelamente ao lado AB. Os triangulos assim formados são todos iguaes entre si, visto como os lados Cc, Ll, Hh, Ee e Nn, são partes de parallelas interceptadas por parallelas; os angulos em C, L, H, E e N são iguaes como *correspondentes* áquellas parallelas e á transversal CD, e os angulos em c, l, h, e e n são tambem iguaes como alternos-internos relativamente ás parallelas Cc, Ll, Hh, Ee e Nn, e ás transversaes BC, KL, GH, FE, MN e AD: assim, pois, têm elles um lado igual, adjacente a dois angulos respectivamente iguaes, e dessa igualdade concluimos, emfim, que $CL=LH=HE=EN=ND$.

2.º Si AB e AF forem incommensuraveis, provaremos, da maneira seguinte, que a razão não pode ser nem menor nem maior que a de DC para DE:

Seja a principio $AB:AF::DC:DI$, sendo DI menor que DE (Fig. 38). Podemos dividir o lado AB em partes tão pequenas que, tirando por todos os pontos de divisão, parallelas a BC, passe uma dellas, fe, entre os pontos I e E; teremos, pelo que fica dito, em virtude da commensurabilidade de AB para Af, $AB:Af::DC:De$; os antecedentes desta proporção sendo os mesmos que os da anterior, concluir-se-ha daqui uma nova proporção entre os consequentes de ambas: $AF:Af::$ $::DI:De$, resultado absurdo porque sendo AF maior do que Af, será DI menor que De. Tambem não pode ser $AB:AF::$ $::DC:DI'$, sendo DI' maior que DE; porque tendo dividido AB de maneira que uma das parallelas $f'e'$ caia entre os pontos E e I', teremos $AB:Af'::DC:De'$. Fazendo uma nova proporção entre os consequentes desta ultima e os da precedente, teremos

$$AF:Af'::DI':De',$$

resultado tambem absurdo, porque sendo AF menor que Af', é DI' maior que De': logo o quarto termo da proporção formada pelas rectas AB, AF, DC, necessariamente ha de ser DE. Da proporção $AB:AF::DC:DE$, tira-se $AB-AF:$

$:AF::DC-DE:DE$, ou $FB:AF::EC:DE$; ou finalmente $AF:FB::DE:EC$, invertendo as duas razões. (8 d).

Da proposição precedente deduzem-se os seguintes corollarios:

1.° *Corollario.* Consideremos ainda o mesmo trapezio $ABCD$ (Fig. 38). Si tirarmos pelo ponto B a recta BC_1 parallelamente a CD, formaremos o triangulo ABC_1 cujo lado BC_1 interceptará a parallela FE no ponto G. Ora, pelo que fica dito, $AF:FB::DE:EC$; mas $EC=BG$ e $GC_1=$ $=DE$, como partes de parallelas interceptadas por parallelas. Portanto, substituindo EC e DE por suas iguaes, a proporção precedente se transforma em $AF:FB::C_1G:GB$.

Logo, *si tirarmos em um triangulo uma recta FG, parallela a um dos lados AC_1, os outros dois lados, BA* e *BC_1 ficarão cortados em partes proporcionaes por esta recta.*

2.° *Corollario.* Reciprocamente, *quando uma recta corta dois lados de um triangulo em partes proporcionaes ella é parallela ao terceiro lado.*

Com effeito, si no triangulo ABC_1 (Fig. 38), tivessemos $AB:AF::C_1B:C_1G$, e a linha FG não fosse parallela a AC_1, poderiamos tirar pelo ponto F uma recta FH parallela AC_1, e que daria: $AB:AF::C_1B:C_1H$ (1.° corol.), proporção que tem os mesmos três primeiros termos que a precedente: logo $FG=FH$, e por consequencia as rectas FG e FH se confundem; e a primeira é necessariamente parallela a AC_1.

3.° *Corollario. A recta BD* (Fig. 40), *que divide em duas partes iguaes um dos angulos B de um triangulo qualquer ABC, reparte o lado opposto AC em dois segmentos pro-*

(8 d) Ainda que a razão entre duas linhas incommensuraveis não seja rigorosamente assignalavel, nem por isso deixa de existir, porque podemos aproximar-nos della quanto quisermos; e duas razões incommensuraveis devem ser reputadas iguaes quando, por mais longe que se leve a aproximação para uma e outra, a sua differença seja sempre nulla. (Lacroix-Geometria).

porcionaes aos lados adjacentes. Isto é, teremos esta proporção:

$$AD:DC::AB:BC$$

Isto se prova, tirando CE parallela a BD, e que encontre em E o prolongamento de AB. Resulta assim do 1.º corollario:

$$AD:DC::AB:BE;$$

demais, o triangulo CBE é isosceles, porque o angulo BCE é igual a CBD, como alternos-internos relativamente á transversal BC, e o angulo BEC é igual ao angulo ABD como correspondentes em relação á transversal AE, e os angulos ABD e CBD são iguaes como metades do mesmo angulo ABC: portanto, os angulos BCE e BEC tambem são iguaes, logo BE é igual a BC como lados oppostos a angulos iguaes; donde finalmente:

$$AD:DC::AB:BC.$$

Advertencias:

1.ª Suppondo que o triangulo ABC não é isosceles nem equilatero, a proporção precedente é ainda verdadeira relativamente á bissectriz BD do angulo exterior EBC (Fig. 41); isto é, *a bissectriz do angulo exterior a um triangulo divide o lado opposto prolongado em dois segmentos proporcionaes aos lados adjacentes*, isto é: AB:BC::AD:CD.

Com effeito, tirando pelo ponto C a recta CF parallelamente á bissectriz BD, até encontrar o lado AB, e prolongando o lado AC até D, teremos no triangulo ABD, em consequencia da parallela ao lado BD, a proporção:

$$AC:CD::AF:FB,$$

ou $$AC+CD:CD::AF+FB:FB,$$

isto é, $$AD:CD::AB:BF \quad (1)$$

Mas, as mesmas parallelas dão: $\wedge$ DBE = $\wedge$ CFB e $\wedge$ DBC = $\wedge$ BCF; por causa da bissectriz BD, temos $\wedge$ DBE = $\wedge$ DBC. Logo, resulta $\wedge$ CFB = $\wedge$ BCF; portanto, o triangulo CBF é isosceles, e BC = BF. Substituindo, pois, BF pelo seu igual BC na proporção (1), teremos AD : : CD : : AB : BC, ou AB : BC : : AD : CD; como queriamos demonstrar.

2.ª *Si os lados do angulo interno forem iguaes, a bissectriz BD do angulo externo* (Fig. 42) *será parallela ao terceiro lado do triangulo.*

Porque $\wedge$ EBC = $\wedge$ A + $\wedge$ C; e como $\wedge$ A = $\wedge$ C, por ser isosceles o triangulo, será $\wedge$ EBC = 2 $\wedge$ C, e portanto $\frac{1}{2}$ $\wedge$ EBC = $\wedge$ C: logo a bissetriz BD e a base AC prolongada formam com o lado BC angulos alternos-internos iguaes, e por conseguinte são parallelas. E' evidente que o mesmo teria lugar para as bissectrizes de qualquer dos angulos externos de um triangulo equilatero.

3.ª Do que precede resulta que si os dois lados do angulo interno forem iguaes, a bissectriz do angulo externo será parallela ao outro lado do triangulo, e a bissectriz do angulo interno dividirá este lado em duas partes iguaes. Ao contrario, si os lados do angulo interno forem desiguaes, a bissectriz do angulo externo não será parallela ao terceiro lado. Entretanto si de um dos vertices B se traçar uma parallela BG ao lado opposto AC (Fig. 40), os angulos formados em torno deste ponto, e do mesmo lado de AB, equivalem á somma dos angulos internos do triangulo. Assim é que prolongando AB até E, se vê que $\wedge$ EBG = $\wedge$ C como *correspondentes* ás parallelas BG e AC, e $\wedge$ GBC = $\wedge$ C como *alternos-internos* em relação ás mesmas parallelas. E como a somma dos angulos formados em torno do ponto B e do mesmo lado de AE vale dois angulos rectos, chega-se por este modo ao 1.º theorema de Thales, já demonstrado no n.º 63.

104 — O SEGUNDO THEOREMA DE THALES. Por meio do pri-

meiro corollario acima indicado, demonstra-se facilmente a segunda lei geometrica descoberta por Thales, e que assim se enuncia: *Dois triangulos mutuamente equiangulos têm os seus lados respectivamente proporcionaes.*

Supponhamos, com effeito, os dois triangulos A B C, A'B'C' (Fig. 43), onde $\wedge A = \wedge A'$, $\wedge B = \wedge B'$ e $\wedge C = \wedge C$. Tomemos sobre B A e B C comprimentos iguaes respectivamente a B'A' e B'C', e liguemos os pontos assim determinados pela recta D E. Os dois triangulos A'B'C' e B D E serão iguaes por terem, por hypothese, o $\wedge B = \wedge B'$, comprehendidos pelos lados iguaes que acabamos de construir. Os outros elementos serão portanto iguaes, de sorte que $\wedge BDE = B'A'C' = BAC$.

Dahi resulta que as rectas D E e A C são parallelas e por conseguinte o lado D E divide A B e B C em partes proporcionaes (1.° corol.), isto é,

$$DA : BD :: EC : BE$$

ou $$DA + BD : BD :: EC + BE : BE,$$

ou ainda $$AB : BD :: BC : BE,$$

ou emfim $$AB : A'B' :: BC : B'C',$$

como queriamos demonstrar: tal é a segunda lei de Thales, a qual pode assim ser considerada como uma consequencia da primeira, visto como a deduzimos da theoria das parallelas que della resultou conforme vimos. A lei angular deve, pois, ser considerada como a base principal das especulações geometricas.

O segundo theorema de Thales permitte estender as duas propriedades precedentemente citadas (1.° e 2.° corols, n.° 103) a um numero qualquer de rectas concorrentes. E' facil de ver que *tantas linhas AB, AC, AD, AE, AF, quantas se quiserem* (Fig. 44), *tiradas por um mesmo ponto A, e encontrando duas parallelas GH e BF, são cortadas por estas em partes proporcionaes, e as cortam tambem em partes proporcio-*

naes. Com effeito, os triangulos BAC, GAI, que são equiangulos, dão

$$AB:AG::AC:AI::BC:GI;$$

os triangulos CAD e IAK dão

$$AC:AI::AD:AK::CD:IK;$$

os triangulos DAE e KAL dão

$$AD:AK::AE:AL::DE:KL;$$

os triangulos EAF e LAH dão finalmente

$$AE:AL::AF:AH::EF:LH$$

Todas estas razões são iguaes, porque a segunda de cada serie é a primeira da seguinte. Tomando primeiramente só aquellas que comprehendem as linhas tiradas do ponto A, teremos:

$$AB:AG::AC:AI::AD:AK::AE:AL::AF:AH;$$

depois, reunindo as que contêm as partes das parallelas BF e GH, virá

$$BC:GI::CD:IK::DE:KL::EF:LH,$$

o que mostra que estas linhas estão cortadas em partes proporcionaes.

Considerando os triangulos GAI, IAK, KAL, LAH como tendo dois dos seus lados cortados por uma recta parallela ao terceiro, temos (1.º corol.)

$$AG:BG::AI:CI \qquad AI:CI::AK:DK$$
$$AK:DK::AL:EL \qquad AL:EL::AH:FH.$$

donde se tira

$$AG:BG::AI:CI::AK:DK::AL:EL::AH:FH,$$

e donde resulta que as rectas AB, AC, AD, AE e AF estão cortadas em partes proporcionaes.

Antes de applicar este theorema e as proposições precedentes á verificação das propriedades do *trapezio*, vamos utilizal-os para resolver os três importantes problemas que seguem.

Da quarta e da terceira proporcional a três linhas dadas e divisão de uma linha em partes proporcionaes a outras linhas dadas.

1.º Seja proposto achar a principio uma quarta proporcional a três linhas dadas, M, N e P, ou o quarto termo desta proporção $M:N::P:x$.

Solução. Tracem-se (Fig. 45) duas rectas indefinidas AB e AC, que façam entre si um angulo qualquer; tome-se sobre a primeira, de A até B, uma distancia AB igual a M, e de A até C uma distancia igual a N; depois, ponha-se sobre a primeira de A até D, a terceira linha P. Unam-se com uma recta os pontos BC, tirando pelo ponto D, parallelamente a BC, a recta DE, teremos em AE a quarta proporcional pedida; porque

$$AB:AC::AD:AE \quad (1.º\ \text{corol.})$$

o que dá

$$M:N::P:AE$$

2.º Si as duas rectas N e P fossem iguaes, a linha AE, dada pela proporção $M:N::N:AE$, seria o que os geometras chamam uma *terceira* ou uma *media proporcional.* A construcção deste caso não differe do precedente; o ponto D cae então em δ, e a recta δe, parallela a BC, corta sobre AC a parte Ae, igual á terceira proporcional, porque temos:

$$AB:AC::AC:Ae, \text{ ou } M:N::N:Ae$$

3.º Seja agora proposto *dividir uma recta dada, da mesma maneira que outra está dividida*, isto é, *em partes proporcionaes ás desta ultima.*

Solução. Seja δe, (Fig. 46) a linha que se quer dividir, e A C a linha já dividida em três partes pelos pontos F e G. Tracemos sobre esta recta um triangulo A B C que tenha os três lados iguaes, o que se effectuará descrevendo successivamente dos pontos A e C como centros e com um raio igual a A C dois semi-circulos cujas semi-circumferencias se cortarão em B, determinando o triangulo. Depois, tomando um comprimento igual a δe, de B para D sobre o lado B A, e de B até E sobre o lado B C, trace-se D E; as rectas que unirem os pontos de divisão F e G com o vertice B cortarão a linha D E em I e K, dividindo-a assim em partes proporcionaes ás de A C, como requer o enunciado da questão. Com effeito, como $BA = BC$ e $BD = BE$, é evidente a proporção:

$$BD : DA :: BE : EC$$

da qual resulta (2.º corol.), que D E é parallela a A C. O triangulo B D E sendo portanto equiangulo com B A C, dará esta proporção:

$$BA : BD :: BC : BE$$

e como por construcção $AC = BA$, teremos necessariamente $DE = BD = \delta e$. Isto posto, segundo o theorema precedente, as rectas parallelas D E e A C ficam divididas em partes proporcionaes, tanto uma como outra.

Si a linha para dividir fosse $\delta' e'$, maior que A C, seria preciso prolongar indefinidamente os lados B A e B C abaixo de A C; depois, levando $\delta' e'$ sobre B A, de B para D′, e sobre B C, de B para E′, tirar-se-ia D′E′, e os prolongamentos das rectas B F e B G dividiriam D′E′, nos pontos I′ e K′ em partes proporcionaes ás de A C, em virtude da proposição anterior.

Outra solução. A questão precedente pode tambem ser resolvida da maneira seguinte: Seja A H (Fig. 47) a recta que se ha de dividir. Tire-se pelo ponto A uma recta indefinida A P, que faça com A H um angulo qualquer P A H, sobre a qual se tomem seguidamente as partes em que está dividida a linha da qual se conhecem as divisões; ligue-se a extremidade P da ultima com a extremidade H da linha que se ha de dividir; depois, pelos pontos I, K, L, M, N e O tirem-se parallelamente a P H as rectas I B, K C, L D, M E, N F e O G, que cortarão A H em partes proporcionaes ás de A P.

Este ultimo processo demonstra-se attendendo que no triangulo A C K cujos lados A C e A K são cortados por B I, parallela ao terceiro lado C K, temos (2.º corol.):

$$AB:AI::AC:AK::BC:IK;$$

o triangulo A D L, considerado em relação á recta C K, dá

$$AC:AK::AD:AL::CD:KL;$$

o triangulo A E M, considerado em relação á recta L D, dá

$$AD:AL::AE:AM::DE:LM;$$

e assim nos demais. Todas estas series de razões iguaes se encadeiam por meio da segunda razão de cada uma, que vem a ser a primeira da seguinte: portanto, tomando sómente as razões que contêm as divisões da recta A P, teremos

$$AB:AI::BC:IK::CD:KL::DE:LM, \text{ etc...},$$

o que mostra que as partes A B, B C, C D, D E, etc..., de A H, são proporcionaes ás partes A I, I K, K L, L M, etc..., de A P.

Simplifica-se um tanto este processo, tirando pelo ponto

H uma linha H Q parallela a A P, e em sentido contrario, sobre a qual se tomam, começando do ponto H, partes H X, X V, V U, U T, etc..., respectivamente iguaes a P O, O N N M, M L, etc...; as rectas P H, O X, N V, etc..., que ligarem os pontos de divisão correspondentes sendo parallelas, cortarão a recta A H em partes proporcionaes ás de A P ou de H Q.

Consequencia: divisão de uma recta em partes iguaes. Si na Fig. 47 as partes de A P fossem iguaes entre si, as de A H tambem o seriam. Dahi resulta, que os processos acima indicados (o 1.º e o precedente) servem para dividir uma linha recta em um numero qualquer de partes iguaes. Para isto convem primeiro considerar a recta A F (Fig. 48) como indefinida; depois, tomando sobre esta recta uma parte A C de uma grandeza arbitraria, applical-a seguidamente um numero de vezes igual ao de partes em que se quer dividtr a recta D E; o ponto F, em que terminarem estas rectas, será a extremidade da linha A F, e acabaremos a construcção como na primeira solução acima indicada.

Pelo processo mencionado para a segunda solução, seria sobre a recta A P (Fig. 47), considerada como indefinida, que se deviam levar successivamente partes iguaes e arbitrarias, porque A H representa a linha dada.

Construcção das escalas. A divisão das rectas em partes iguaes é o fundamento da construcção das *escalas graphicas*, isto é, das rectas que servem para medir as outras. Com effeito, si houvessemos dividido em partes iguaes a recta C D (Fig. 1), bastaria examinar quantas dessas partes continha A B para termos a razão de A B para C D, ao menos de uma maneira tanto mais aproximada quanto menores fossem as partes de C D. A imperfeição dos instrumentos e os limites dos nossos sentidos nos obrigam logo a parar na divisão das linhas cujas partes nos escapam pela sua pequenez; para estender nossos recursos a este respeito, imaginou-se a divisão por transversaes representada na Fig. 49, e cuja construcção é a seguinte.

Havendo primeiramente dividido a linha A C em um numero qualquer de partes iguaes, como B C, e querendo depois dividir B C em um numero de partes tão grande que cada uma dellas não se possa bem distinguir, tirem-se sobre A C, pelos pontos A e C, as perpendiculares A A'''' e C L; tome-se sobre A A'''' uma parte arbitraria A A', que se levará seguidamente tantas vezes quantas partes se quiser fazer em B C (a figura representa quatro); pelos pontos de divisão A', A'', A''', A'''', tirem-se rectas parallelas a A C; finalmente unam-se os pontos B e L pela *transversal* B L.

Isto feito, si tirarmos a linha B K parallela a C L, formaremos os triangulos B D E, B F G, B H I, B K L, que darão estas proporções (104):

B D:B K::D E:K L, B F:B K::F G:K L, B H:B K::H I:K L

das quaes resulta: 1.º que como B D é $\frac{1}{4}$ de B K, D E tambem é $\frac{1}{4}$ de K L ou de B C, que é igual a K L, como parte de parallela interceptada por parallelas; 2.º que sendo B F $\frac{1}{2}$ de B K, F G tambem é $\frac{1}{2}$ de K L ou de B C; 3.º que sendo B H os $\frac{3}{4}$ de B K, H I é a mesma porção de K L ou de B C.

Isto mostra que tomando sobre a primeira, a segunda e a terceira rectas parallelas a A B, as distancias A' E, A'' G, A''' I, respectivamente iguaes a A' D + D E, A'' F + F G, A''' H + H I, teremos A B + $\frac{1}{4}$ B C, A B + $\frac{1}{2}$ B C, A B + $\frac{3}{4}$ B C.

Isto basta para ensinar como se pode construir uma escala de transversaes, afim de obter quaesquer divisões e o uso que se pode fazer della. Uma escala similhante toma o nome de

escala decimal quando contém dez parallelas a A B, porque então dá as decimas partes de B C. (Lacroix-Geometria).

Supponhamos, por ex., que se necessita de uma escala graphica na proporção $\frac{1}{5000}$ isto é, de tal modo que 5000 decimetros do terreno a medir sejam representados por $0^m,1$, e portanto 100 metros por $0^m,02$. Para isto, sobre uma recta indefinida A B (Fig. 50) tome-se um comprimento A F igual a $0^m,02$, o qual seja dividido em 10 partes iguaes; A F representando 100 metros, cada divisão representará 10 metros; portanto, numeraremos os pontos de divisão, 0, 10, 20,... 100. Appliquemos então comprimentos iguaes a A F á direita do ponto F, e indiquemos estas novas divisões pelos numeros: 100, 200, 300 etc., de modo a attingir o maior numero de centenas de metros que tivermos a considerar no desenho. Pelos pontos A, F, 100, 200, 300, etc., elevemos perpendiculares a A B. Appliquemos sobre F E dez vezes um comprimento arbitrariamente tomado, e pelos pontos de divisão, 1, 2, 3... 10 tiremos parallelas a A B. Tomemos sobre C E, a partir do ponto E, um comprimento E G igual ao decimo de A F; liguemos F G; e pelos pontos de divisão de A F tiremos parallelas a F G. As *centenas* de metros são então representadas pelas divisões de F B; as *dezenas* de metros pelas divisões de A F, e os *nove primeiros multiplos* do metro pelas partes de parallelas a A B comprehendidas no triangulo F G E.

Com effeito, consideremos a quinta parallela e o segmento L 5 sobre essa recta. Teremos, $\frac{F5}{FE} = \frac{L5}{GE} = \frac{5}{10}$ e como G E representa 10 metros, L 5 representará 5 metros. Quando tivermos, por ex., de marcar sobre o plano um comprimento de 325 metros, collocaremos uma das pontas do compasso sobre a intersecção M da parallela a F G que corresponde ao ponto de divisão *20* sobre A F, com a parallela a A F que passa pela divisão 5 de F E, e collocaremos a outra ponta do compasso sobre a parallela a F E que é marcada com o numero 300.

Teremos, pois, 300 metros desde o ponto P até á recta F E, e 25 metros desde F E até ao ponto M.

Reciprocamente, quando tivermos de conhecer o comprimento real de uma linha do plano, tomaremos uma abertura de compasso igual a essa linha, e poderemos vêr logo quanto ella mede. Supponhamos que ella caia entre 200 e 300 metros. Colloquemos então uma das pontas do compasso sobre a parallela 200 a F E, e façamos escorregar sobre essa parallela até que a outra ponta do compasso encontre um ponto de intersecção de qualquer das parallelas a A F com qualquer das parallelas a F G, ou corte uma das parallelas a F G entre duas parallelas a A F. Supponhamos, por ex., que se encontre a parallela 30 a F G entre a oitava e a nona parallela a A F. O comprimento procurado conterá, pois, 200 metros mais 30 metros e mais um numero de metros comprehendido entre 8 e 9 metros. Teremos, portanto, 238 ou 239 metros.

A aproximação será determinada com um erro abaixo de meio metro, si conhecermos qual é a parallela a A F mais proxima da ponta do compasso.

Tal é o problema da construcção de uma escala.

Foi baseando-se no processo que acabamos de indicar que o mathematico portuguez Pedro Nunes construiu a escala que tem o seu nome *(Nonius)*, a qual foi vulgarizada pelo francez Vernier, e desde então adaptada aos instrumentos proprios para medir os angulos. Della nos occuparemos na nota C.

105. — Decomposição do trapezio em um rectangulo e dois triangulos rectangulos, propriedades desses triangulos. A decomposição do trapezio em um parallelogrammo e um triangulo (Fig. 38) tendo conduzido a escola de Thales ás importantes propriedades citadas para os triangulos no n.º precedente e no n.º 103 (1.º, 2.º e 3.º corols.), era de esperar que os geometras gregos continuassem este estudo com a mesma orientação.

Assim aconteceu, com effeito, e presume-se com bons fundamentos que os discipulos de Pythagoras, decompuseram por

sua vez o trapezio em um parallelogrammo rectangulo e dois triangulos rectangulos additivos (Fig. 51), mediante perpendiculares baixadas dos vertices superiores sobre a base, e tambem em um rectangulo A P Q D e dois triangulos rectangulos subractivos A P B e C Q D (Fig. 52). Provém talvez desse facto a circunstancia de se attribuir a Pythagoras a descoberta da principal propriedade de taes triangulos, sendo certo entretanto que antes delle já a geometria theocratica a conhecia, como adiante veremos. Traçando as duas diagonaes A C e B D, bem como a mediana F E (Fig. 52), os discipulos de Thales já haviam mostrado: 1.º Que *a mediana* F E *é parallela ás bases;* 2.º *Cada uma das diagonaes é interceptada em seu meio pela linha mediana* F E, e se cortam em partes proporcionaes; 3.º Que finalmente *o dobro da mediana* F E *é equivalente á somma das bases.* Com effeito, 1.º A recta F E ligando os meios dos lados transversaes é parallela ás bases do trapezio. Porque tirando B C, (Fig. 38) parallelamente a C D, o triangulo A B C nos dá a proporção A F : F B :: C_1 G : : G B, a qual nos mostra que F G e portanto seu prolongamento F E é parallelo á base A D (2.º corol.), e por conseguinte a B C.

2.º Nos triangulos B A D e C A D (Fig. 52), por ser A F = = F B, e por conseguinte C E = E D, têm-se as proporções B F : F A :: B M : M D e C E : E D :: C N : N A, chamando M e N as intersecções das diagonaes com a mediana, ou ainda por ser $\frac{BF}{FA} = 1$ e $\frac{CE}{ED} = 1$, virá finalmente $\frac{BM}{MD} = 1$ e $\frac{CN}{ND} = 1$, donde $\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND}$, o que prova a segunda propriedade.

3.º Tirando pelos pontos E e F (Fig. 53) as perpendiculares F P e E Q, e prolongando-as superiormente até encontrar em P' e Q' o lado B C prolongado, e comparando a mediana E F com as bases parallelas do rectangulo P P' Q' Q, vê-se que E F = P' Q' e E F = P Q, donde resulta 2 E F = P Q + + P' Q'. Mas os triangulos rectangulos subtractivos sendo res-

pectivamente iguaes aos additivos, segue-se que $AP = P'B$ e $DQ = Q'C$; e como essas quantidades iguaes $P'B$ e $Q'C$ representam o que falta á base superior do rectangulo para ser igual á base maior do trapezio, é evidente que a relação acima pode ser transformada na seguinte:

$$2EF = PQ + (AP + DQ) + P'Q' - (P'B + Q'C)$$

ou

$$2EF = AD + BC,$$

visto como não fizemos mais do que addicionar e subtrahir ao segundo membro duas quantidades equivalentes. Adiánte veremos que os discipulos de Thales demonstraram esta propriedade de um outro modo. Entretanto, formulando-a como ahi fica, tem-se a vantagem dogmatica de ligar o estudo do trapezio ás principaes propriedades do triangulo rectangulo, conforme a escola de Pythagoras.

E com effeito, proseguindo no estudo do trapezio, os geometras posteriores procuraram estabelecer a relação existente entre os lados não parallelos e as diagonaes. Como, porém, estavam estas espontaneamente ligadas aos triangulos rectangulos que, conforme vimos, fazem parte do trapezio, foram levados a examinar as propriedades de taes triangulos.

Propriedades do triangulo rectangulo:

Si do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo se abaixar uma perpendicular sobre o lado opposto, chamado hypotenusa, 1.ª esta perpendicular partirá o triangulo em outros dois que lhe serão equiangulos; 2.ª dividirá a hypotenusa em duas partes ou segmentos taes que cada lado do angulo recto será media-proporcional entre o segmento que lhe é adjacente e a hypotenusa inteira; 3.ª a perpendicular será tambem media-proporcional entre os dois segmentos da hypotenusa.

Com effeito, supponde o triangulo ABC (Fig. 54) rectan-

gulo em A, e sendo A D perpendicular sobre B C, é claro que os triangulos B A C e B A D serão equiangulos, porque tendo dois angulos respectivamente iguaes, os terceiros tambem o são; isto é, $\wedge$ B commum a ambos, $\wedge$ B A C = B D A como rectos, donde $\wedge$ B A D = B C A. Pelas mesmas razões o triangulo D A C é equiangulo com B A C, porque o $\wedge$ C é commum, e $\wedge$ A D C = $\wedge$ B A C como rectos, donde resulta $\wedge$ D A C = $\wedge$ A B C.

Si compararmos successivamente cada um dos dois triangulos B A D e A D C com o triangulo B A C, observando que têm os lados proporcionaes por serem equiangulos, acharemos: B D:B A::B A:B C e C D:A C::A C:B C, o que constitue a segunda parte da proposição.

Comparando, emfim, os triangulos B A D e A C D, teremos B D:A D::A D:C D, o que forma a terceira parte do enunciado acima.

Lei theocratica sobre o triangulo rectangulo. Do theorema precedente conclue-se que, referindo-se os três lados de um triangulo rectangulo a uma medida commum, *a segunda potencia do numero que exprime o comprimento da hypotenusa é igual á somma das segundas potencias dos numeros que exprimem o comprimento dos outros dois lados.*

Com effeito, as proporções B D:B A::B A:B C, C D:A C:: ::A C:B C

dão $$BD = \frac{\overline{BA}^2}{BC},\ CD = \frac{\overline{AC}^2}{BC};$$

sommando B D com C D, temos

$$BC = \frac{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}{BC},\ \text{ou}\ \overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2,$$

como queriamos demonstrar.

Tal é a principal propriedade dos triangulos rectangulos. A sua descoberta é attribuida a Pythagoras; mas é certo que

antes delle já os theocratas conheciam e applicavam esta lei, que formularam mediante a consideração das areas, a saber: *o quadrado construido sobre a hypotenusa de um triangulo rectangulo equivale á somma dos quadrados construidos sobre os dois outros lados.* Teremos occasião de estabelecer por este modo a lei theocratica, que assim servirá de verificação especial á sua expressão linear aqui indicada.

A instituição desta lei, tal como acaba de ser feita, permitte caracterizar a imperfeição algebrica das *proporções*.

«Este primeiro modo geometrico do calculo das relações é tão pouco proprio a secundar a *deducção*, que a antiguidade não pôde ligar a lei theocratica á sua fonte linear, que deve normalmente prevalecer para um tal theorema. Entretanto, um primeiro passo nos estudos algebricos basta hoje para dispôr todo espirito justo a realizar esta deducção. Mas, attenta a situação mental das castas theocraticas, ella offerecia outrora difficuldades quasi invenciveis ás melhores intelligencias, quando era preciso addicionar duas *proporções* previamente transformadas em equações.» (A. Comte. Synt. Subjt.).

A lei theocratica sobre o triangulo rectangulo permitte construil-o quando se exprime cada um de seus lados por uma formação inteira do modulo. Assim, suppondo a principio que K representa um numero impar qualquer, ter-se-ha

$$K^2+\left(\frac{K^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{K^2+1}{2}\right)^2.$$

Suppondo em seguida que L é um numero par qualquer, ter-se-ha,

$$L^2+\left(\frac{L^2}{4}-1\right)^2=\left(\frac{L^2}{4}+1\right)^2$$

Emfim, representando por x e y dois numeros inteiros quaesquer, teremos a formula geral

$$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2,$$

onde basta attribuir a x e a y valores inteiros quaesquer, para obter os lados pedidos. Por exemplo: suppondo $x=5$ e $y=2$, virá

$$(25-4)^2+(2\times 10)^2=(25+4)^2$$

ou $$21^2+20^2=29^2;\ \text{isto é}\ 441+400=841.$$

Applicações. As proposições sobre o triangulo rectangulo, deduzidas precedentemente, permittem resolver os seguintes problemas:

1.° *Achar a altura do vertice do angulo recto sobre a hypotenusa, conhecendo os dois segmentos determinados nella por aquella perpendicular.* Representando por x a altura, por a' e a'' os dois segmentos, teremos: $a':x::x:a''$, donde $x^2=a'a''$, e portanto $x=\sqrt{a'a''}$.

2.° *Achar os dois segmentos da hypotenusa, conhecendo esta e a altura correspondente.* Representando por a a hypotenusa, por h a altura, e por s' e s'' os segmentos pedidos, teremos: $s's''=h^2$, $s'+s''=a$, donde (Apont.[os] de Algebra, n.° 275) a equação $s^2-as+h^2=o$,

e portanto $$s=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-h^2},$$

ou $$s=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4h^2}=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a+2h)(a-2h)};$$

expressão que nos dá os dois segmentos, e onde se vê que o maximo valor de a é $a=2h$; de sorte que a hypotenusa não pode ser maior que o dobro da altura do triangulo.

3.° *Achar os dois lados do angulo recto, conhecendo a altura e a hypotenusa.* Começa-se por determinar os dois segmentos desta, como no problema precedente; conhecidos a' e a'' e representando por b e c os dois lados pedidos do angulo recto, teremos:

$$a:b::b:a',\ \text{donde}\ b^2=aa',\ \text{e portanto}\ b=\sqrt{aa'}.$$

Obtido o lado *b*, a lei theocratica fará conhecer *c*, porquanto $a^2 = b^2 + c^2$, donde $c^2 = a^2 - b^2$, e portanto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Generalização da lei theocratica. Vejamos como os geometras do seculo XVII generalizaram a lei theocratica, applicando-a a um triangulo qualquer. *Referindo os três lados de um triangulo rectilineo a uma medida commum, e sendo por conseguinte expressos em numero, si da extremidade de qualquer destes lados baixarmos uma perpendicular sobre um dos outros dois, a segunda potencia do primeiro será igual á somma das segundas potencias dos ultimos, menos duas vezes o producto do lado sobre o qual cae a perpendicular pela distancia desta ao vertice do angulo opposto ao primeiro lado, si este angulo fôr agudo, ou mais duas vezes o mesmo producto, si o angulo fôr obtuso.*

Isto quer dizer que teremos no primeiro caso (Fig. 17)

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \times CD;$$

e no segundo (Fig. 18)

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,\overline{AC} \times CD.$$

Demonstração. Quando a perpendicular BD (Fig. 17) reparte ABC em dois triangulos ABD e BDC, rectangulos em D, o primeiro dá, em virtude do que dissemos precedentemente, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; e do segundo se tira $\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2$; substituindo este valor de $\overline{BD}^2$ no de $\overline{AB}^2$, teremos $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2$; mas é claro que $AD = AC - CD$, numero que tem por quadrado $\overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \times CD + \overline{CD}^2$ (8 d): substituindo este valor na expressão de

(8 d) Nesta proposição, em que consideramos as linhas como avaliadas em numeros, deve-se suppor concluida a composição da segunda potencia de um numero igual á somma ou á differença de dois outros; composição á qual, aliás, se pode chegar sem o soccorro dos caracteres algebricos (Lacroix-Geometrie).

$\overline{AC}^2$, teremos finalmente

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \times CD + \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2,$$

e que se reduz a

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \times CD.$$

Na figura 18, em que a perpendicular BD cae fóra do triangulo, considerando o lado BC opposto ao angulo agudo A, obteremos seguindo a mesma marcha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \times CD;$$

Como, porém, $CD = AD - AC$, virá emfim:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD$$

Quando o lado AB (Fig. 18) é opposto a um angulo obtuso C, a perpendicular caindo necessariamente fóra do triangulo ACB, se deduz igualmente dos triangulos ABD e CBD, rectangulos em D:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \text{ e } \overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2:$$

donde se conclue

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2,$$

mas temos $AD = AC + CD$, valor que tem por quadrado

$$\overline{AC}^2 + 2\,\overline{AC} \times CD + \overline{CD}^2,$$

e do qual resulta

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,\overline{AC} \times \overline{CD} + \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2,$$

e que se reduz a

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ AC \times CD,$$

tal é o 2.º caso do enunciado.

Cotejando esta proposição com a precedente, concluimos que conhecidos os três lados de um triangulo, se póde determinar si o angulo opposto a qualquer desses lados é agudo, recto ou obtuso. Com effeito, no primeiro caso, em que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\ \overline{AC} \times CD$, é evidente que a segunda potencia de AB é menor que a somma das segundas potencias dos dois outros lados BC e AC. No segundo caso, em que o angulo C é recto, teremos sómente $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$; assim, a segunda potencia de AB é igual á somma das dos outros dois lados. No terceiro caso, finalmente, em que temos $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ \overline{AC} \times CD$, a segunda potencia de AB é maior que a somma das dos outros dois lados.

Assim, por exemplo, applicando estas observações ao triangulo cujos lados são expressos por 5^m, 7^m e 8^m, e portanto suas segundas potencias por 25^m, 49^m e 64^m, resulta que o angulo opposto ao lado 8^m é agudo, porque a segunda potencia deste lado, que é 64, é menor que a somma 74^m, das segundas potencias dos dois outros lados. Cumpre ainda observar que a especie do angulo opposto ao maior lado, fará conhecer a do triangulo. (Lacroix-Géometrie).

Si quisessemos ainda determinar, no exemplo precedente, a distancia do pé da perpendicular ao vertice do angulo opposto, bastaria estabelecer a equação $8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 7y$, sendo y a distancia pedida.

Teriamos, pois, $64 = 25 + 49 - 14y$, ou $14y = 25 + 49 - 64$, ou ainda $14y = 10$; donde $y = \frac{10^m}{14} = \frac{5^m}{7} = 0^m,714$ aproximadamente.

Ainda como applicação dos theoremas precedentes, vamos calcular as alturas de um triangulo, por meio dos seus lados.

Seja A B C o triangulo considerado, e designemos para a, b e c, os comprimentos dos lados respectivamente oppostos aos angulos A, B e C. Procuremos a altura $BD = h$, tirada do vertice B (Fig. 17).

Dos dois angulos A e C, um pelo menos é agudo; supponhamos que seja este o angulo C. No triangulo rectangulo B D C tem-se a principio $h^2 = a^2 - \overline{CD}^2$ e no triangulo A B C a relação $c^2 = b^2 + a^2 - 2b.CD$; donde se deduz $CD = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ e a primeira relação se torna $h^2 = a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2} =$

$$= \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2} = \frac{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2},$$

ou ainda

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4b^2} =$$

$$= \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4b^2} = \frac{[(a+b+c)(a+b-c)][(c+a-b)(c-a+b)]}{4b^2}.$$

Ora representando por p o perimento do triangulo A B C, isto é $a + b + c = 2p$, virá $b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$, $a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)$ e $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$. Substituindo estes valores na expressão de h^2, simplificando e extrahindo a raiz quadrada teremos

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

que é a altura relativa ao lado b tomado para base. Por exemplo: para as alturas h, h_1, h_2, do triangulo cujos lados tem 3^m, 9^m e 6^m, se acha com aproximação de um millimetro

$$h = 3^m{,}641 \qquad h_1 = 5^m{,}259 \qquad \text{e} \qquad h_2 = 7^m{,}886$$

Esta applicação e as que acima demos da lei theocratica nos deixam antever a possibilidade de substituir a solução graphica do problema fundamental sobre a medida da linha

recta, por uma solução numerica, baseada simplesmente nas relações existentes entre os elementos do triangulo, as quaes permittem, como se vê, o conhecimento de uns por meio dos outros.

106 — DEDUCÇÃO DAS RELAÇÕES NUMERICAS ENTRE AS DIAGONAES E OS LADOS DOS QUADRILATEROS SYMETRICOS. PROBLEMAS. Confirmando a observação que acaba de ser feita, vejamos como se pode, por meio das relações que ligam as diagonaes dos lados correspondentes dos quadrilateros de que nos occupámos, determinar uma destas por meio daquellas, ou vice-versa. No caso do *trapezio*, basta applicar a ultima proposição do numero precedente aos dois triangulos que as diagonaes ahi formam, para chegar-se immediatamente á relação que existe entre ellas e os lados não parallelos. Com effeito, os triangulos B A D e A C D (Fig. 51) nos dão:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,\overline{AD} \times GD,$$

e

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,\overline{AD} \times AH;$$

ou representando por *c* e *a* os lados não parallelos, por *b* e *b* as duas bases inferior e superior, e por *d* e *d'* as diagonaes, teremos:

$$c^2 = d^2 + b^2 - 2b \times GD, \text{ e } a^2 = d'^2 + b^2 - 2b + AH;$$

sommando estas duas igualdades, vem:

$$a^2 + c^2 = d^2 + d'^2 + 2b^2 - 2b\,(GD \times AH).$$

Notemos, porém, que $GD + AH = b + b'$: porque representando por *p* e *p'* as partes de A G e D H, e attendendo que $GH = BC = b'$ como partes de parallelas interceptadas por parallelas, teremos:

$$GD = b' + p' \text{ e } AH = p + b',$$

e portanto

$$GD + AH = b' + p' + b' + p = p + b' + p' + b' = b + b'.$$

Substituindo este valor na igualdade acima, teremos:

$$a^2 + c^2 = d^2 + d'^2 + 2b^2 - 2b(b + b')$$

ou $$a^2 + c^2 = d^2 + d'^2 + 2b^2 - 2b^2 - bb',$$

ou emfim $$a^2 + c^2 = d^2 + d'^2 - 2bb' \quad (1)$$

onde se vê que *em todo trapezio a somma dos quadrados dos lados não parallelos é igual á somma dos quadrados das diagonaes menos duas vezes o producto das bases.*

De resto, pode-se tambem deduzir desta propriedade as relações que ligam as diagonaes e os lados de todos os quadrilateros symetricos.

Si se tratar do *trapezio symetrico*, isto é, si $a = c$ attendendo que são por isso iguaes os angulos adjacentes a cada base, resulta que $d = d'$ e virá:

$$2a^2 = 2d^2 - 2bb', \text{ ou } d^2 = a^2 + bb'.$$

Assim tambem, no caso do *parallelogrammo*, por ser $a = c$ e $b = b'$, a expressão (1) nos dará $2a^2 = d^2 + d'^2 - 2b^2$, ou ainda $2a^2 + 2b^2 = d^2 + d'^2$, ou emfim

$$d^2 + d'^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (2),$$

onde se vê que *em todo parallelogrammo a somma dos quadrados das diagonaes, equivale ao duplo da somma dos quadrados de dois lados consecutivos.*

No caso particular do *losango*, por ser $a = b$, a relação precedente (2) nos dá

$$d^2 + d'^2 = 4a^2, \text{ ou emfim } a^2 = \frac{d^2 + d'^2}{4} \quad (3)$$

No caso do *rectangulo*, a relação (2) nos dá ainda, por ser $d = d'$, $2d^2 = 2(a^2 + b^2)$, ou emfim $a^2 + b^2 = d^2$ (4) onde se vê que cada diagonal é hypotenusa do triangulo rectangulo formado por dois lados consecutivos do quadrilatero.

Emfim, no caso mais particular do *quadrado*, por ser $a = b$, a relação precedente (4) nos dá $2a^2 = d^2$, donde se tira $d = a\sqrt{2}$ (5) ou $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$, o que mostra que *a diagonal é incommensuravel com o lado do quadrado*. (Ver nota D).

Para concluir o estudo dos quadrilateros symetricos, vamos resolver alguns problemas uteis.

Problema I. — Construir um parallelogrammo, conhecendo dois lados a e b *e o angulo comprehendido* A.

Para isto, da extremidade A de uma linha AB = a (Fig. 55) faremos $\wedge$ DAB = A, e tomaremos sobre este segundo lado um comprimento AD = b. Depois, pelos pontos B e D, tiraremos rectas respectivamente parallelas a AD e a AB, as quaes se cortarão em C: Será ABCD o parallelogrammo pedido; porque seus lados oppostos são iguaes como partes de rectas parallelas interceptadas por parallelas, e os angulos oppostos A e C são tambem iguaes, por terem seus lados parallelos e de aberturas voltadas em sentido opposto.

Vê-se que o problema só admitte uma solução, e que assim *um parallelogrammo fica determinado por dois dos seus lados e o angulo comprehendido*. Dahi se conclue: 1.º Que *um losango ficará tambem determinado pelo conhecimento de um angulo e um lado;*

2.º Que *um rectangulo fica determinado quando se conhece os seus dois lados contiguos*, e que são chamados sua *base* e sua *altura;*

3.º Que *um quadrado fica determinado pelo simples conhecimento de um lado.*

Problema II. — Construir um polygono que seja igual a um polygono dado.

O methodo ordinariamente seguido, que consiste em tra-

çar successivamente todos os lados, assim como os angulos comprehendidos, apresenta este serio inconveniente: o menor erro commettido sobre um angulo influindo sobre as direcções de todos os angulos seguintes, o comprimento do lado que deve fechar finalmente o polygono poderá ser alterado de modo sensivel.

O processo seguinte, aliás mais simples, não possue este inconveniente: Pelo vertice A do polygono dado ABCDEFGI (Fig. 56) tire-se uma recta qualquer A A′, de um comprimento arbitrario, e por todos os outros vertices tracem-se no mesmo sentido parallelas a ella, sobre as quaes tomem-se comprimentos BB′, CC′... todos iguaes a AA′, e juntem-se emfim A′ a B′, B′ a C′, C′ a D′... E' claro que o polygono A′B′C′D′E′F′G′I′, será igual a ABCDEFGI; porque são iguaes os lados e os angulos respectivos, aquelles como lados oppostos de parallelogrammos, e estes por terem lados parallelos com aberturas voltadas em sentidos oppostos.

Este processo, muito conhecido entre os carpinteiros de construcções navaes, pode ser empregado com successo para executar o modelo ou *padrão* das curvas que devem terminar uma pedra de cantaria ou uma peça de madeira.

Com effeito, seja C a curva em questão. Marca-se sobre ella um grande numero de pontos muito aproximados, principalmente onde a curva é mais forte, e por todos esses pontos tira-se uma serie de rectas parallelas. Isto feito, por meio de uma recta flexivel prolongam-se todas estas parallelas sobre uma prancha muito delgada, collocada sobre o plano em que se acha traçada a curva C, e tomam-se sobre estas parallelas, a partir de cada um dos pontos marcados em C, distancias todas iguaes entre si. Unindo, em seguida, por um traço continuo, os pontos assim determinados, ter-se-ha uma curva C′ que será muito sensivelmente igual á curva C. Porque, se concebermos que ella escorregue parallelamente a si mesma, quando um desses pontos tiver chegado ao ponto correspondente de C, os outros pontos coincidirão tambem com os que lhes correspondem em C′. Só restará cortar a prancha segundo

o contorno obtido, para se ter um padrão, que applicado sobre uma peça de madeira, servirá para traçar uma curva igual a C.

Problema III — Construir uma figura igual a outra dada, decompondo-a em quadrados.

Para copiar uma figura, pode-se empregar ainda um outro processo, que é muito expedito e conveniente, sobretudo quando não se tem necessidade de uma exactidão muito rigorosa: é o *methodo dos quadrados*. Começa-se por traçar um angulo recto que comprehenda a figura entre os seu lados; sobre cada um desses lados toma-se um numero bastante grande de partes iguaes, de modo que tirando por todos os pontos de divisão de cada linha uma serie de parallelas á outra, o rectangulo determinado pelas duas parallelas extremas encerre toda a figura. Numera-se, em seguida, todas estas parallelas, a partir do vertice do angulo primitivo, I, II, III, ..., 1, 2, 3... Isto feito, constroe-se sobre o papel que deve receber a cópia um rectangulo igual ao precedente, e dividido como elle em pequenos quadrados, que devem ser numerados do mesmo modo.

Querendo-se fixar sobre a cópia a posição de um certo ponto do original, basta notar que elle se acha, por exemplo, no quadrado formado pelas verticaes numeradas II e III, e pelas horizontaes numeradas 6 e 7. Portanto, toma-se com o compasso sua distancia á vertical II, e applica-se esta distancia sobre a horizontal 7 do segundo quadro, a partir desta vertical; depois, tendo medido do mesmo modo a distancia do ponto á horizontal 7, deve-se applical-a perpendicularmente á horizontal 7 da cópia, o que se pode fazer á simples vista, obtendo-se assim a posição correspondente do ponto considerado no original. Determinar-se-ha do mesmo modo a posição de todos os outros vertices do polygono, e juntando cada um delles com o seguinte, ter-se-ha executado a cópia.

Si a figura encerrar linhas curvas, deve-se referir a cópia aos pontos onde cada uma dellas corta os lados dos diversos

quadrados que atravessa, o que dará um certo numero de pontos de cada curva, de sorte que só restará juntal-os por um traço contínuo. Tal é o methodo que se emprega para copiar as cartas geographicas, as plantas topographicas, e mesmo um quadro qualquer, quando se quer obter uma cópia fiel. Neste ultimo caso, não se podendo traçar os quadrados sobre o original, coloca-se este sob um quadrado de madeira, dividido em quadrados iguaes por fios de seda ou cabello bem tensos.

Com o papel quadriculado, basta fazer uso do compasso para traçar o rectangulo e suas divisões, e desde então se póde marcar aproximadamente em cada quadrado da cópia os pontos correspondentes aos do original. Dahi se conclue que os erros são tanto menores quanto menores forem os quadrados. E quando os detalhes de um quadrado forem muito numerosos convirá, portanto, subdividil-o em partes menores, de sorte que se chegará assim a attenuar os erros, tanto quanto se quiser. A experiencia mostra que com o exercicio deste methodo de cópia, e empregando os quadrados cada vez maiores, adquire-se logo uma grande exactidão no golpe de vista (8 e).

110 — Embaraços no methodo exposto para resolver o problema da linha recta, possibilidade de outra solução. Não é necessario insistir mais sobre a construcção de um polygono igual a outro dado. As indicações que ahi ficam bastam plenamente para elucidar esta questão, que constitue apenas o modo mais simples de resolver o problema fundamental sobre a medida indirecta dos comprimentos rectilineos. A sua efficacia é mesmo mais theorica do que pratica. Porque, fazendo

---

(8 e) P. L. Girodde, *Leçons de Géométrie, suivies de notions élémentaires de géométrie descriptive* 3me edit. Paris 1858. Esta obra, bem como os demais trabalhos deste digno professor, são muito recommendaveis. Foi elle um dos primeiros que depois do meado do seculo passado vulgarizaram em França os ensinamentos mathematicos de A. Comte, como se pode ver consultando a sua *Algebra*, publicada em Paris, naquella época. Por este motivo, lhe dedicamos o acrostico deste paragrapho.

surgir as noções essenciaes sobre a igualdade dos polygonos e o parallelismo das rectas, ella fornece as bases indispensaveis para um outro modo de resolver o mesmo problema, cuja necessidade póde ser facilmente constatada.

Com effeito, mostrámos como é possivel estimar as distancias, mesmo inaccessiveis, como se pode ver na nota (7 d) do numero 64. Todavia, o modo até aqui exposto suppõe que se tenha um lugar plano onde se possa traçar uma figura perfeitamente igual á considerada, que pode ser muito grande e impossivel de construir, por nunca se dispor de tamanho espaço. Para obviar esse inconveniente, ao envés de construir, por exemplo, uma figura DEF (Fig. 28) igual á considerada, no terreno, pode-se traçar no papel uma outra em proporções menores, dando entretanto uma idéa perfeita da grandeza da primeira. De sorte que, em vez de traçar DF sobre o terreno, com o mesmo numero de metros que AB, se pode fazer *df* sobre o papel (Fig. 28) com tantos centimetros, por exemplo, quantos forem os metros contidos em AB; e si nos extremos *d* e *f* desta linha *df* se applicar as rectas *de* e *fe*, sob os mesmes angulos que DE e FE fazem com DF, ter-se-ha, quando prolongadas sufficientemente, o triangulo *d ef* cujos lados serão proporcionaes aos do triangulo DEF, de accôrdo com o 2.º theorema de Thales. Por este modo, achar-se-ha em *de* e *fe* tantos centimetros quantos metros tiverem DE e FE; o que suppõe serem proporcionaes os lados oppostos aos mesmos angulos dos triangulos equiangulos DEF e *def* (104), isto é, estarem entre si em relação de 1 centimetro a 1 metro ou $\frac{df}{DF} = \frac{1}{100}$.

Embora este segundo modo não seja verdadeiramente o mais usual, o problema da medida das rectas exige quasi sempre que se construa um polygono cujos lados sejam proporcionaes aos do polygono considerado, ao envés de serem iguaes. Estão, por exemplo, neste caso todas as questões que citámos a respeito do *levantamento das plantas;* porque na im-

possibilidade de construir um polygono igual ao que se imagina no terreno, somos forçados a traçar no papel um outro similhante.

No paragrapho seguinte, nos occuparemos dessa segunda solução, baseada na *theoria da similhança.*

---

§ 9.º

Polygonos quaesquer e sua similhança. Applicações

111 — LIGAÇÃO DA IDÉA DE IGUALDADE Á DE SIMILHANÇA: CARACTER DESTA EM GEOMETRIA. Ordinariamente dizemos que duas cousas são tanto mais similhantes quanto menos differem uma da outra; de sorte que a similhança de dois seres é sempre julgada pela menor ou maior differença que offecem quanto ao conjunto de suas propriedades. Abstrahindo de algumas destas para sómente considerar as restantes, tambem apreciamos muitas vezes a similhança parcial quanto a certas qualidades, sem levar em conta as demais que caracterizam os seres comparados.

A sciencia não fez mais do que generalizar esse apanhado do bom senso universal, estendendo aos phenomenos uma comparação analoga, independentemente dos seres que os manifestam. Dois phenomenos são tanto mais similhantes quanto menos differem um do outro; de sorte que a igualdade delles é de facto um estado para que tende constantemente a sua similhança, desde que esta seja supposta variavel.

No dominio geometrico, onde apenas se considera a simples noção de forma, afim de medir a sua extensão, a idéa de similhança deve tomar evidentemente um caracter mais preciso, de modo que possa ser expressa numericamente. Com effeito, abstrahindo-se ahi de todas as outras propriedades salvo a de grandeza, a apreciação da similhança fica reduzida a comparar essas grandezas em seu conjunto.

L. CARNOT.

Nestas condições, duas formas são similhantes quando apenas differem pelo tamanho; ou melhor, segundo a judiciosa observação de Clairaut, *pela escala em que estão construidas*: Neste caso, é uma em ponto grande representada pela outra em proporções menores; de sorte que, imaginando cresça esta por igual em todas as suas partes, é evidente que a sua similança com a outra se aproximará cada vez mais da igualdade, que pode afinal ser attingida. Vê-se portanto que duas formas iguaes são sempre similhantes, ao passo que duas formas similhantes só podem ser iguaes quando são construidas com as mesmas proporções, isto é com a mesma escala de grandezas.

Tratando-se do caso mais simples, isto é das figuras rectilineas a duas dimensões, podemos esperar que a questão se simplifique ainda, reduzindo-se em ultima analyse ao typo triangular. Porque vimos, com effeito, que todo o polygono pode sempre ser decomposto em triangulos, sendo pois de presumir que a similhança de taes aggregados rectilineos fique dependente dos triangulos que os constituem. Assim acontece effectivamente. E como acabamos de vêr que duas figuras similhantes apenas differem pelas proporções de suas partes, é evidente que *dois triangulos rectilineos serão tambem similhantes quando tiverem os seus lados mutuamente proporcionaes.*

A proporcionalidade dos lados torna-se pois o criterio para se julgar da similhança dos triangulos. Como, porém, em virtude da segunda lei de Thales, a proporcionalidade dos lados resulta immediatamente da igualdade dos angulos e vice-versa, concluimos emfim que *dois triangulos similhantes têm seus angulos mutuamente iguaes e portanto os seus lados homologos proporcionaes*, chamando-se lados homologos áquelles que ficam respectivamente oppostos a angulos iguaes. Estas duas condições estão pois ligadas entre si, de maneira que uma traz sempre comsigo a outra.

A 2.ª lei de Thales torna-se pois a base essencial da theoria da similhança, que effectivamente se reduz ao caso dos

triangulos. Imaginando um triangulo qualquer A B C, concebe-se sempre a possibilidade de existirem muitos outros similhantes, isto é apenas differindo delle pela proporção de seus lados. Porque si *a b c* representam estes tres lados, sendo *a* o maior, ter-se-ha $a < b + c$, e portanto $na < nb + nc$, qualquer que seja o numero *n*. De sorte que se poderá construir sempre uma serie de triangulos cujos lados sejam *na*, *nb* e *nc*, isto é proporcionaes a *a*, *b* e *c*, por isso que a maior dessas tres linhas é ainda menor do que a somma das duas outras.

112 — Condições de similhança dos triangulos. «A similhança dos triangulos, ligada como acabamos de vêr á lei dos angulos, comporta varios modos que, embora equivalentes, são de facto distinctos e correspondem aos diversos casos estudados na theoria da igualdade. Como esta theoria, deve-se normalmente considerar a outra como consistindo em reconhecer que uma metade das condições proprias á similhança dos triangulos resulta sempre da outra metade.

Este encadeamento fornece tres theoremas usuaes que combinam convenientemente a proporcionalidade dos lados e a igualdade dos angulos, de maneira a suscitar outros tantos modos de construir triangulos similhantes.» Eis os tres theoremas:

Theorema I. Dois triangulos são similhantes quando têm dois angulos respectivamente iguaes. Porque o terceiro angulo de um será necessariamente igual ao terceiro do outro (63), e os dois triangulos sendo equiangulos têm os lados mutuamente proporcionaes (104), e serão por conseguinte similhantes. Estão por exemplo neste caso dois triangulos rectangulos que têm um dos angulos agudos igual, porque tambem o são os angulos rectos.

Deste theorema resulta immediatamente que dois triangulos são tambem similhantes:

1.º *Quando os seus lados são respectivamente parallelos;* 2.º *quando os seus lados são respectivamente perpendiculares;*

3.º *em geral, quando os seus lados são igualmente inclinados uns em relação aos outros.*

O primeiro corollario torna-se evidente nos triangulos dispostos como A B C e D E F (Fig. 57), porque os angulos, como A e D, que têm a abertura voltada no mesmo sentido são iguaes, como vimos.

Acerca dos triangulos dispostos em situação inversa, como mostra a Fig. 58, si prolongarmos o lado E F do triangulo D E F, de maneira que corte dois lados do triangulo A B C em G e em H, os angulos A G H e D E F serão iguaes, como alternos-internos relatívamente ás parallelas A B, D E, e á secante G H, bem como os angulos A H G e E F D relativamente ás parallelas A C, D F; o triangulo E D F será por consequencia similhante ao triangulo A G H, que tambem será similhante ao triangulo A B C, porque os angulos A H G e A G H são iguaes aos angulos A C B e A B C, como correspondentes relativamente ás parallelas G H, B C, e ás secantes A C, A B. E' evidente que os lados homologos, no caso actual, são parallelos entre si.

2.º Para provar o segundo carollario, sejam os dois triangulos A B C e D E F (Fig. 59), dispostos de maneira que o lado E F seja perpendicular sobre B C prolongado, que D F prolongado seja perpendicular sobre A C, e finalmente D E sobre A B; pelo ponto A, opposto ao lado B C, perpendicular sobre E F, tirem-se as rectas A G e A H, respectivamente parallelas aos outros dois lados D F e D E do triangulo D E F, e por consequencia perpendiculares uma sobre A C e outra sobre A B. Os angulos C A G e B A H serão iguaes por hypothese; si a cada um subtrahirmos o mesmo angulo C A H, os dois angulos resultantes B A C e G A H serão iguaes, mas os angulos G A H e E D F, que por construcção têm os lados parallelos e a abertura voltada no mesmo sentido, são iguaes: Logo o angulo B A C será igual a E D F.

Depois tirando pelo ponto B as rectas B I e B K parallelas aos lados E F e D E, formaremos os angulos rectos C B I e

A B K, dos quaes tirando a parte commum A B I, ficarão os angulos iguaes A B C e I B K; e sendo o segundo igual a D E F, por causa do parallelismo das rectas B I e E F, B K e E D, concluiremos que A B C tambem é igual a D E F. Por consequencia os triangulos A B C e D E F, que têm dois angulos iguaes respectivamente, são similhantes.

Tambem é claro que os lados homologos são aquelles que são respectivamente perpendiculares, porque sendo o angulo D igual ao angulo A, o lado E F é homologo a B C; e assim os outros.

3.º Geralmente, quando os três lados de um triangulo são igualmente inclinados em relação aos três lados de outro, os triangulos serão ainda similhantes pela mesma razão. Assim, por exemplo, dois triangulos oppostos pelo vertice e interceptados entre duas linhas parallelas são similhantes; porque os angulos do vertice são iguaes, bem como os das bases (alternos-internos iguaes), de sorte que os lados não parallelos se cortarão em partes reciprocamente proporcionaes (104).

Theorema II. Dois triangulos são similhantes quando têm um angulo igual comprehendido entre lados respectivamente proporcionaes.

Demonstração. Seja o angulo A do triangulo A B C (Fig. 60) igual ao angulo D do triangulo D E F, e supponhamos A B : D E :: A C : D F. Tomemos sobre os lados A B e A C do primeiro triangulo duas partes A *e* e A *f*, respectivamente iguaes a D E e a D F; traçando *e f*, formaremos o triangulo A *e f* igual ao triangulo D E F; e cortando a recta *e f* os lados do triangulo B A C em partes proporcionaes, teremos:

$$AB : DE \text{ ou } Ae :: AC : DF \text{ ou } Af,$$

donde se segue que *e f* será parallela a B C (103). Isto posto, os angulos *e* e *f*, respectivamente iguaes aos angulos E e F, tambem serão iguaes aos angulos B e C; e por conseguinte os triangulos A B C e D E F, que têm os seus angulos respectivamente iguaes, serão similhantes.

No caso particular em que os triangulos considerados são

rectangulos, basta evidentemente que *sejam proporcionaes os dois lados do angulo recto.*

Theorema III. *Dois triangulos que têm os lados respectivamente proporcionaes são similhantes.*

Com effeito, nos triangulos ABC e DEF (Fig. 60), supponhamos esta serie de razões iguaes:

$$AB:DE::AC:DF::BC:EF.$$

Si tomarmos sobre AB uma parte A*e* igual a DE, e tirarmos uma recta *ef* parallela a BC, os triangulos ABC e A*ef*, similhantes entre si (1.º Theor.), darão:

$$AB:Ae::AC:Af::BC:ef;$$

mas como A*e* é igual a DE, todas as razões da segunda serie serão iguaes ás da primeira, e como os antecedentes em ambas são os mesmos, os consequentes tambem o serão; portanto teremos:

$$Af = DF,\ ef = EF.$$

Dahi se segue que o triangulo DEF é igual ao triangulo A*ef*; e como este é similhante ao triangulo ABC (2.º Theor.), tambem o triangulo DEF ha de ser similhante ao mesmo.

Taes são os três casos principaes relativos á similhança dos triangulos. Comparando-os com os caracteres de igualdade, vê-se que cada caso desta exige sempre três condições, ao passo que cada caso de similhança exige apenas duas, donde resulta immediatamente uma terceira. Isto é, conforme vimos,

1.º $A = A',\ B = B',$ donde $C = C';$

2.º $B = B',\ \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'},$ donde $A = A';$

3.º $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$ donde $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$

113 — A CONSTRUCÇÃO DOS TRIANGULOS SIMILHANTES. Seja proposto *construir sobre uma recta dada um triangulo similhante a outro dado.* Podemos resolver esse problema partindo de cada um dos caracteres precedentemente indicados para comprovar a similhança destas figuras. Logo, si quisermos formar sobre uma recta dada E F um triangulo similhante a outro dado A B C, conseguil-o-hemos dos três modos seguintes:

1.º Tirando pelos pontos E e F rectas que façam com E F os angulos E e F (Fig. 61), respectivamente iguaes aos angulos B e C, o que de accordo com o 1.º Theor. determinará um triangulo D E F similhante ao proposto.

2.º Fazendo no ponto E, sobre E F, um angulo igual ao angulo B (Fig. 62), e tomando sobre um dos lados deste angulo uma distancia D E que seja a quarta proporcional ás três linhas B C, E F e A B (104).

Desta maneira tambem os dois triangulos A B C e D E F são similhantes, porque têm um angulo igual comprehendido entre lados proporcionaes (2.º Theor.).

3.º Finalmente, procurando uma quarta proporcional ás três linhas B C, E F e A B, outra ás três linhas B C, E F e A C, e construindo com as duas linhas achadas e sobre E F um triangulo D E F (Fig. 63), serão similhantes os triangulos D E F e A B C porque têm os três lados respectivamente proporcionaes.

O primeiro destes três modos é evidentemente o que fornece a solução mais simples, e por isto mesmo é o mais usado. Qualquer que seja o modo empregado para construir um triangulo similhante a outro, é evidente que o problema pode comportar muitas soluções. Porque os triangulos similhantes differindo apenas pelas escalas em que são construidos, segue-se que essa construcção pode ser realizada em varias proporções de grandeza. Portanto para que o problema tenha uma solução determinada será preciso fixar *a priori* a proporção que deve existir entre toda a grandeza da figura dada

e a que deve ter a figura pedida. Ora, os triangulos similhantes tendo como vimos os seus lados proporcionaes, torna-se evidente que a relação entre dois lados, isto é entre um lado de uma figura e o correspondente da outra, é a mesma que existe entre dois outros lados quaesquer nas mesmas condições.

Uma tal relação define, pois, a proporção de grandeza das duas figuras, e por isto se chama *razão de similhança* ou escala de relação. Adiante veremos quaes as condições que devem presidir á escolha dessa escala. Por ora nos limitamos a indicar a importancia e a utilidade do seu emprego.

Notemos alem disto que a *razão de similhança* não só é dada pela relação que existe entre dois lados homologos, como tambem pela que existe entre duas linhas quaesquer similhantemente dispostas nas duas figuras. A estas linhas correspondentes dá-se o nome caracteristico de *linhas homologas*, e é facil de vêr que se acham nas mesmas condições dos lados homologos, isto é são proporcionaes a elles e ficam tambem oppostas a angulos iguaes.

Temos um exemplo de linhas homologas nas alturas dos triangulos similhantes, nas bissectrizes dos seus angulos internos ou externos, nas suas *medianas*, isto é nas rectas tiradas de cada um dos vertices para o meio do lado opposto, e em quaesquer outras linhas em condições analogas.

De um modo geral, pode-se dizer que *em dois triangulos similhantes, duas linhas quaesquer dispostas similhantemente a respeito das outras partes dos triangulos, estão entre si como os lados homologos dos mesmos triangulos.*

Com effeito, imaginemos em um dos dois triangulos similhantes ABC e DEF (Fig. 64) a linha GH, tirada do ponto G no lado AB para o ponto H no lado BC, dividindo este e aquelle numa relação qualquer. Supponhamos que os lados DE e EF sejam divididos nas mesmas relações nos pontos I e K, de maneira que BA:ED::BG:EI e BC:EF::BH::EK, condições necessarias para que as linhas GH e IK tenham a mesma posição nos dois triangulos.

Os triangulos considerados sendo suppostos similhantes, é evidente que as relações B A:E D e B C:E F são iguaes entre si o que dá B G:E I::B H:E K. Os triangulos G B H e I E K terão pois os angulos iguaes B e E comprehendidos entre lados proporcionaes, e portanto serão similhantes entre si. Dahi se conclue que existe necessariamente entre as linhas G H e I K a mesma relação que ha entre os lados homologos dos dois triangulos.

Do que precede se deprehende que as linhas homologas, quaesquer que ellas sejam, ficam ligadas intimamente aos elementos dos triangulos, e portanto contribuem com elles para a solução de todas as questões que se referem á medida indirecta dos comprimentos rectilineos; de sorte que se pode por meio dellas adquirir novos dados que permittirão ir mais longe.

Procuremos, por exemplo, a que distancia dos vertices A e B se cortam no ponto G *as medianas* A D e B E do triangulo A B C (Fig. 65).

Tirando a recta D E, isto é, unindo os meios dos lados A C e B C, é evidente que ella será parallela ao lado A B, e por conseguinte os dois triangulos A G B e D G E são similhantes, como tambem os dois triangulos A C B e E C D. Tem-se, pois, a serie de razões iguaes

$$\frac{DG}{AG} = \frac{EG}{BG} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2};$$

sendo $$DG = \frac{AG}{2} \text{ e } EG = \frac{BG}{2},$$

resulta que $$DG = \frac{AD}{3} \text{ e } EG = \frac{BE}{3},$$

donde se conclue que

$$AG = \frac{2}{3} AD \text{ e } BG = \frac{2}{3} BE.$$

Vê-se, portanto, *que as medianas quaesquer de um trian-*

gulo se cortam em um ponto que fica situado a duas terças partes de cada uma dellas a partir do vertice.

Procuremos ainda a distancia entre os pontos assignalados pela intersecção das duas diagonaes de um trapezio com a mediana aos seus lados não parallelos.

Para isto, notemos a principio que combinando respectivamente o 2.º ou o 3.º caso de similhança com o 1.º corol. do n.º 103 ou com o theorema fundamental do n.º 104, resulta desde logo: 1.º *Que toda parallela a um dos lados de um triangulo forma com os outros dois um segundo triangulo similhante ao primeiro*; 2.º Que *toda recta tirada pelo meio de um dos lados de um triangulo e parallelamente á sua base é igual a metade desta*, porque a razão entre o menor e o maior dos lados sendo a mesma que existe entre as bases é igual a $\frac{1}{2}$.

Isto posto, vê-se que no trapezio ABCD (Fig. 52) cada um dos segmentos da mediana FE, determinados pelas intersecções M e N das diagonaes BD e AC, é parallelo ás bases AD e BC do trapezio, que servem tambem de base aos triangulos ahi formados pelas mesmas diagonaes com um dos lados não parallelos AB. Demais, cada um destes segmentos é igual a metade da base do triangulo correspondente.

Nestas condições, tem-se entre estas linhas homologas as relações seguintes:

$$FM = \frac{1}{2} AD \text{ e } FN = \frac{1}{2} BC,$$

donde

$$FM - FN = \frac{1}{2}(AD - BC);$$

mas

$$FM = FN + NM.$$

Logo, substituindo este valor na igualdade precedente, virá:

$$FN - FN' + NM = \frac{1}{2}(AD - BC),$$

donde $$NM = \frac{AD - BC}{2} = \frac{b - b'}{2},$$

o que mostra que *a distancia entre os dois pontos de intersecção das diagonaes com a mediana aos lados não parallelos de um trapezio é igual á semi-differença entre as suas bases* b e b'.

114 — Resolução do problema da similhança no caso de polygonos quaesquer. As construcções precedentes podem facilmente ser estendidas a todos os outros polygonos, onde veremos que a similhança é sempre reduticvel á dos triangulos que os compõem. E' o que resulta immediatamente das duas proposições seguintes:

1.ª Proposição. Dois polygonos compostos do mesmo numero de triangulos similhantes e similhantemente dispostos, têm os seus angulos iguaes respectivamente e os seus lados homologos proporcionaes, sendo por consequencia similhantes.

Demonstração: Sejam $BAEDC$ e $baedc$ (Fig. 66) os polygonos propostos; os respectivos triangulos ABC e abc sendo similhantes têm os seus angulos iguaes; assim virá:

$$\wedge B = \wedge b,\ BAC = bac.$$

Pela mesma razão, os triangulos ACE e ace dão:

$$CAE = cae,\ CEA = cea;$$

donde se segue que o angulo BAE, formado dos angulos BAC e CAE no primeiro polygono, é igual ao angulo bae, formado dos angulos bae e cae no segundo.

Provar-se-ha do mesmo modo a igualdade dos angulos AED e aed, EDC e edc. Quanto aos ultimos angulos BCD e bcd, é claro que são iguaes, porque são formados, um dos angulos BCA, ACE e ECD, outro dos angulos bca, ace

e *ecd*, que são respectivamente iguaes aos primeiros como angulos homologos de triangulos similhantes.

Tomando as proporções que resultam da similhança dos triangulos ABC e *abc*, ACE e *ace*, ECD e *ecd*, teremos:

$$BC:bc::AB:ab::AC:ac,$$
$$AC:ac::AE:ae::CE:ce,$$
$$CE:ce::ED:ed::CD:cd.$$

Sendo a primeira razão de cada serie a mesma que a ultima da precedente, essas razões são todas iguaes entre si; portanto, considerando só aquellas que contêm os lados dos polygonos, virá $BC:bc::AB:ab::AE:ae::ED:ed::CD:cd$, o que prova que os lados homologos são proporcionaes.

2.ª *Proposição.* Reciprocamente, *quando dois polygonos forem similhantes serão compostos do mesmo numero de triangulos respectivamente similhantes e similhantemente dispostos.*

Demonstração: Como por hypothese os angulos de um dos polygonos são respectivamente iguaes aos do outro, e os lados homologos do primeiro são proporcionaes aos do segundo, teremos (Fig. 66) o angulo B igual ao angulo *b*, e $BC:bc::AB:ab$; donde se segue que os triangulos ABC e *abc* são similhantes (2.º Theor.): logo os angulos BAC e *bac* serão iguaes. Si os subtrahirmos dos angulos BAE e *bae*, iguaes como pertencentes aos dois polygonos, os rectos CAE e *cae* serão iguaes. Demais, os triangulos similhantes ABC e *abc* dão $AB:ab::AC:ac$, e dos lados dos polygonos se tira $AB:ab::AE:ae$; de sorte que teremos $AC:ac::$ $::AE:ae$; donde se segue que os triangulos CAE e *cae* tambem são similhantes (2.º Theor.). Provar-se-ha do mesmo modo a similhança de todos os outros triangulos de cada um dos polygonos, sejam quantos forem estes triangulos.

Problema: Qualquer destas duas proposições permite resolver o problema geral que consiste em *construir sobre uma linha dada um polygono similhante a um polygono dado.*

1.ª *Solução.* Em virtude da 1.ª proposição, dois polygonos similhantes devem ter os angulos iguaes e os lados homologos proporcionaes. Para se fazer uso deste principio, basta, pois, medir-se successivamente cada um dos lados do polygono dado, bem como os angulos que fazem entre si. Reduzindo estes lados na escala definida pela linha dada, e traçando-os sobre o papel com os angulos que formam entre si, ter-se-ha o polygono pedido. Este meio exige, pois, que se meçam $n-2$ angulos e $n-1$ lados do polygono proposto, porque o ultimo destes fica evidentemente determinado pelos outros. Tem, portanto, o inconveniente de exigir a medida directa de muitos comprimentos rectilineos, e por este motivo não é adoptado ordinariamente na pratica, preferindo-se-lhe o processo que se baseia na 2.ª proposição citada.

2.ª *Solução.* Sejam bc e B A E D C a recta e o polygono dados (Fig. 67), de que se quer um outro similhante; decompondo-o em triangulos, faça-se sobre bc, por um dos methodos do numero precedente, um triangulo abc similhante ao triangulo A B C, o que determinará o ponto a; para ter o ponto e, faça-se do mesmo modo sobre ac um triangulo cae similhante ao triangulo C A E, e assim por diante. *O polygono abcde será similhante ao polygono A B C D E, porque serão ambos compostos do mesmo numero de triangulos respectivamente similhantes e similhantemente dispostos.*

Observação util: A applicação deste principio nos conduz, pois, á solução do problema, mediante a construcção de uma serie de triangulos similhantes, por qualquer dos três processos que foram indicados. Todavia, a determinação dos triangulos por dois daquelles meios (2.º e 3.º) não é de ordinario adoptada na medida dos terrenos, por causa da morosidade e da difficuldade da medição directa das distancias, e algumas vezes de sua impossibilidade. Por isto, é o outro (1.º) o mais empregado para obter taes triangulos nos levantamentos. Para isto, é evidente que basta conhecer em um dos triangulos o comprimento de um dos lados e dois dos seus angulos; e em

todos os demais triangulos, dois angulos apenas: a serie de triangulos ficará completamente determinada, e portanto o polygono considerado, sendo esta a terceira solução. Com effeito, seja proposto o polygono A B C M N (Fig. 68). Supponhamos que se tenha medido directamente um dos seus lados M N, bem como os angulos A M N, B M N, C M N e A N M, B N M e C N M. Para se obter sobre o papel um polygono similhante ao considerado, traça-se uma linha *m n*, nas mesmas condições de M N e reduzida segundo uma escala determinada; constroe-se depois em *m* os angulos *a m n*, *b m n*, *c m n*, iguaes respectivamente aos angulos A M N, B M N e C M N, e em *n* os angulos *a n m*, *b n m* e *c n m*, tambem respectivamente iguaes aos anglos A N M, B N M e C N M; o ponto de intersecção *a* das linhas *m a* e *n a* corresponderá ao ponto homologo A, e similhantemente a respeito dos outros; unindo finalmente *a* a *b*, *b* a *c* ..., ter-se-ha o polygono pedido.

Advertencia: Na 2.ª solução indicada acima tiramos as diagonaes do mesmo vertice; mas, como vimos, podem os polygonos ser divididos em triangulos de outros muitos modos, e as proposições precedentes se estendem igualmente a estes casos, entre os quaes ha um que convem examinar. E' aquelle em que se prendem todos os vertices do polygono ás duas extremidades de um mesmo lado (3.ª solução). Este caso é representado na Fig. 68, na qual se ligam os pontos A, B e C aos pontos M e N, por meio de diagonaes.

E' claro que a posição dos três primeiros pontos fica determinada em relação á recta M N logo que são conhecidos os triangulos M N A, M N B e M N C, e *desta maneira se verifica immediatamente* que *para determinar um polygono bastará um numero de triangulos menor de duas unidades que o dos angulos ou dos lados do polygono.*

Tambem é manifesto que si *n* designar este ultimo numero, a determinação da figura dependerá das 2 (n — 2) diagonaes e lados tirados de cada um dos vertices dos angulos da base e da mesma base, o que faz ao todo 2 n — 3 dados (100). Seja

qual fôr a decomposição, e por maior que seja o numero de triangulos, a ligação destes elementos não é augmentada por isso. Todas as figuras rectilineas não podem jamais comportar senão as três relações distinctas que vimos existir entre os angulos e os lados, por mais multiplicados que sejam estes; o que faz naturalmente reduzir ao typo triangular todas as noções sobre a similhança, como acontece com a igualdade dos polygonos (9 a).

A decomposição que effectuámos precedentemente corresponde á que foi obtida na figura 68, onde se toma a base sobre um dos lados do contorno polygonal.

115 — NATUREZA DAS LINHAS HOMOLOGAS E UTILIDADE DELLAS; ESCALA OU RAZÃO DE SIMILHANÇA DOS POLYGONOS. Na decomposição dos polygonos em triangulos similhantemente dispostos, é evidente que as diagonaes se tornam lados homologos desses triangulos, visto como ficam oppostas respectivamente a angulos iguaes em cada um delles. De modo analogo, todas as linhas que forem traçadas nas mesmas condições nos dois polygonos gozarão evidentemente das propriedades dos lados homologos ou proporcionaes. Estão, por ex., neste caso todas as rectas que ligarem os vertices dos angulos iguaes chamados por isto *vertices homologos*. As extremidades de taes linhas homologas são igualmente denominadas *pontos homologos*.

Dois pontos O e O′ (Fig. 69), situados no plano de dois

(9 a) «Dans ce début des études géométriques, il faut normalement indiquer l'appréciation concrète des bases propres à la théorie subjective des nombres, abstraitement instituée en arithmétique. On voit les trois nombres sacrés distinctement représentés et spontanément combinés par l'élément des assemblages géométriques, qui réunit les trois images de côté, d'angle et de triangle. Les relations angulaires consacrent le nombre moyen d'abord entre les angles supplémentaires, puis entre tous ceux d'un même triangle, et finalement envers la demi-somme des suppléments de ceux de tout polygone plan. Cette représentation géométrique des éléments numériques devient linéaire pour le dernier, que toujours détermine la subordination mutuelle des parties d'un assemblage rectiligne. Il faut signaler ces intimes rapprochements entre l'abstrait et le concret comme la source naturelle des illusions métaphysiques sur la liaison mystérieuse de la géométrie avec l'arithmétique, quand on cherche la cause, au lieu de la loi d'un tel ordre de faits mathématiques.» (A. Comte — Synth. Subject.).

polygonos similhantes, são tambem chamados *homologos* quando, juntando um delles O ás extremidades de um lado A B e o outro O′ ás extremidades do lado homologo A′ B′, se obtiverem dois triangulos O A B e O′ A′ B′ similhantes e similhantemente dispostos em relação aos dois polygonos. Em virtude da ultima proposição do numero precedente, resulta pois que dois pontos homologos quaesquer podem ser tomados para centro de decomposição de dois polygonos similhantes em triangulos similhantes e similhantemente dispostos.

Si o ponto O coincidir com um dos vertices A, seu homologo O′ coincidirá com o vertice A′. Si o ponto O fôr exterior ao polygono A B C D E, seu homologo O′ será tambem exterior ao polygono similhante A′ B′ C′ D′ E′; dever-se-ha então considerar os dois polygonos como sendo compostos de triangulos additivos e de triangulos subractivos, conforme adiante veremos.

Em geral, duas rectas situadas no plano de dois polygonos similhantes são chamadas homologas quando suas extremidades são, duas a duas, pontos homologos; taes são, por ex., as diagonaes, como outras quaesquer rectas que unam vertices homologos.

A relação entre duas linhas homologas quaesquer é sempre igual á relação de similhança dos dois polygonos. Com effeito, sejam A B C D E e A′ B′ C′ D′ E′ (Fig. 70) dois polygonos similhantes, e F G e F′ G′ duas rectas homologas quaesquer. A similhança dos triangulos F A B e F′ A′ B′ prova a igualdade dos angulos A B F e A′ B′ F′ e a das relações $\frac{F'B'}{FB}$ e $\frac{A'B'}{AB}$. De modo analogo, a similhança dos triangulos G A B e G′ A′ B′ importa na igualdade dos angulos G B A e G′ B′ A′, bem como na das relações $\frac{G'B'}{GB}$ e $\frac{A'B'}{AB}$. Tem-se, por conseguinte, $\frac{F'B'}{FB} = \frac{G'B'}{GB}$ e o angulo F B G ou G B A — F B A = = $\wedge$ F′ B′ G′ ou G′ B′ A′ — F′ B′ A′.

Portanto, os triangulos F B G e F' B' G' são similhantes, e a relação $\frac{FG}{F'G'}$ é igual a cada uma das relações iguaes $\frac{F'B'}{FB}$ e $\frac{A'B'}{AB}$, isto é, á razão de similhança dos dois polygonos considerados.

A utilidade das linhas homologas ou proporcionaes é incontestavel. Veremos adiante que o conhecimento dellas nos pode levar muitas vezes á determinação de outros elementos do polygono considerado, sem que seja preciso decompol-o em seus triangulos.

No numero 65 do § 7.º demos antecipadamente um exemplo da applicação de uma linha homologa para fixar a posição de um ponto no terreno relativamente ao contorno polygonal determinado pelos seus pontos principaes (Fig. 25). Alem disto, o conhecimento preciso de dois lados homologos basta por si só para verificar a exactidão da medida effectuada sobre todo o contorno ou perimetro do polygono.

A este respeito é facil de vêr que *os contornos de dois polygonos similhantes estão entre si como os lados homologos dos mesmos polygonos, ou como duas outras linhas homologas quaesquer*. Com effeito, os polygonos similhantes A B C D E e *a b c d e* (Fig. 66) dão esta serie de razões iguaes:

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE::de::AE:ae;$$

donde se conclue por uma propriedade das *proporções* que

$$AB+BC+CD+DE+AE:ab+bc+cd+de+ae::AB:ab,$$

isto é, o contorno A B C D E: o contorno *a b c d e*::A B:*a b* ou::B C:*b c* etc....

Sendo A C e *ac* duas linhas homologas que ligam os pontos homologos A, C e *a, c*, é evidente que se tem A B:*a b*

$::$ A C : *a c*, ou B C : *bc* $::$ A C : *ac*, de sorte que, substituindo a segunda razão de qualquer destas proporções na proporção acima, teremos tambem contorno A B C D E : contorno *a b c d e* $::$ A C : *a c*.

Problema. Este theorema permitte *construir um polygono similhante a outro dado e cujo perimetro seja igual a uma recta dada p.*

Para isto basta procurar uma quarta proporcional ao perimetro do polygono dado A B C D E, a *p* e a A B, e ter-se-ha o lado que deve ser homologo a A B no polygono procurado; de sorte que a questão fica reduzida a construir sobre uma recta conhecida um polygono similhante a outro, problema já resolvido.

116 — OBSERVAÇÃO SOBRE A ESCOLHA DA RAZÃO DE SIMILHANÇA: ESCALA NUMERICA OU DE REDUCÇÃO; E ESCALA GRAPHICA OU DE PROPORÇÃO, SEUS USOS; REDUCÇÃO DAS CARTAS. — A relação de similhança entre dois polygonos sendo dada, como vimos, pela relação entre dois dos seus lados, ou entre duas outras linhas homologas quaesquer, resulta dahi a possibilidade de construir-se as figuras similhantes conforme as dimensões desejadas. Assim, por exemplo, a planta de um terreno ou de um objecto qualquer não podendo ser reproduzida com suas verdadeiras dimensões, tem-se o recurso de reduzil-as proporcionalmente numa relação determinada pela grandeza do papel em que deve ser traçada e pela natureza dos detalhes que se desejam representar. Portanto, a escala de reducção de uma planta não é mais do que a relação constante que existe entre a distancia de dois pontos quaesquer da planta e a distancia horizontal dos dois pontos homologos do terreno. Assim, por exemplo, si uma distancia de 100 metros fôr representada por um decimetro, a planta estará construida na escala de $\frac{1}{100 \times 10} = \frac{1}{1000}$.

Similhante relação é ordinariamente representada por uma fracção cujo numerador é sempre a unidade e cujo denominador só encerra, em geral, os factores primos 2 e 5, afim de facilitar os calculos.

O desenho deve ser então acompanhado desta relação ou *escala*, que permittirá evidentemente conhecer as verdadeiras distancias entre os pontos figurados. Si designarmos por l o comprimento de uma linha graphica, e por L o de sua homologa natural, ter-se-ha evidentemente a igualdade $\frac{l}{L} = \frac{1}{M}$, chamando $\frac{1}{M}$ a escala adoptada. Desta igualdade deduz-se os valores $l = \frac{L}{M}$ e $L = lM$, onde se vê que *o comprimento graphico equivale ao quociente de seu homologo natural pelo denominador da escala*, e que *o comprimento natural é o producto do seu homologo graphico por aquelle denominador.*

A escolha dessas escalas depende sobretudo da extensão do terreno e do destino da planta. Assim, as plantas adoptadas para as propriedades particulares são em geral de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{500}$ e $\frac{1}{1000}$.

As plantas parciaes do cadastro são ordinariamente de $\frac{1}{250}$ ou $\frac{1}{500}$; as das cidades, praças-fortes e grandes linhas de fortificações são em geral de $\frac{1}{2000}$ ou $\frac{1}{2500}$; as dos districtos communaes são ordinariamente de $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10.000}$ e $\frac{1}{20.000}$, segundo sua extensão. As cartas geographicas dos paizes e continentes podem ser de $\frac{1}{80.000}$, $\frac{1}{100.000}$, $\frac{1}{200.000}$, $\frac{1}{1.000.000}$ e até $\frac{1}{2.000.000}$, conforme sua extensão.

Ordinariamente prefere-se empregar as escalas decimaes, em virtude da adopção do systema metrico francez. Offerecem a vantagem de dar as distancias em multiplos e submul-

tiplos da unidade de comprimento. Assim, a escala de $\frac{1}{100}$ corresponde a um centimetro por metro, a de $\frac{1}{200}$ a 5 milimetros por metro, e assim por diante. A escala de $\frac{1}{80.000}$ equivale a 25 milimetros por 2 kilometros.

Uma outra consideração importante deve tambem servir de guia na escolha das escalas; é o grau de exactidão que se pode esperar do desenho. A experiencia prova que no traçado graphico $\frac{1}{5}$ do milimetro ou 0,^{m}0002 e com mais forte razão toda grandeza menor é inapreciavel á simples vista, mesmo com o auxilio do compasso. E como a expressão geral da escala é $\frac{1}{M}$, o comprimento que se pode desprezar no terreno é de $\frac{0,001}{5} \div \frac{1}{M}$ ou $\frac{M}{5000}$ metros. Dahi resulta que é necessario que o instrumento empregado não conduza a erros superiores a este limite, convindo portanto determinal-o antes de se começar o *levantamento*, afim de se conhecer o grau de precisão a dar ás operações. Si se quiser, por exemplo, empregar a escala de $\frac{1}{20.000}$, o comprimento que se pode desprezar sobre o terreno, sem alterar a exactidão graphica do levantamento, será de $\frac{20.000}{5000} = 4^{m}$; ao passo que empregando-se a escala de $\frac{1}{1000}$, será de $\frac{1000}{5000} = 0,^{m}2$: donde se segue que no segundo caso se deve lançar mão de instrumentos mais perfeitos do que no primeiro, ou reduzir a escala afim de que se possa contar com a exactidão graphica, quando só se dispuser de instrumentos imperfeitos. A escala deverá, pois, ser escolhida tendo-se tambem em consideração a natureza dos instrumentos empregados no levantamento das plan-

tas, de maneira que os erros inevitaveis commettidos nas medidas sobre o terreno tornem-se inapreciaveis na escala da planta.

A determinação de um comprimento graphico, ou natural, exigindo sempre duas operações, uma medição directa e uma *divisão* ou *multiplicação*, simplifica-se muito o trabalho construindo-se figuras geometricas, ás quaes por extensão dá-se tambem o nome de escalas (104). Estas escalas fazem conhecer os comprimentos horizontaes entre os pontos do terreno por meio de seus homologos na planta, e reciprocamente. As escalas graphicas são de duas especies: as *escalas rectilineas* ou *simples*, e as *escalas de transversaes*, que podem ser *decimaes* ou não. As primeiras consistem, como sabemos, em uma recta dividida em partes iguaes, cada uma das quaes representa uma medida de comprimento tomada no terreno. O duplo decimetro de madeira, metal ou marfim, chanfrado em ambas as bordas, subdividido em centimetros e millimetros, constitue uma escala simples, aliás muito util por servir tambem de regua e até de esquadro, visto como os traços de divisão se correspondem nas duas bordas, e se acham situados sobre a perpendicular commum ao comprimento dellas. Já mostrámos como se constróe uma escala de transversaes, e, quer se empregue esta, quer aquella, a escala deve ser traçada no desenho, afim de facilitar a sua intelligencia.

Nas escalas rectilineas ou simples, as fracções da unidade são apreciadas a olho, e isto basta ordinariamente nos levantamentos topographicos. Querendo-se, porém, maior precisão na avaliação das fracções, deve-se recorrer á escala decimal de transversaes, que se constróe abaixo da rectilinea.

As escalas graphicas são chamadas de *proporção* para se distinguirem das escalas numericas que se denominam de *reducção*.

Emfim, quando se quer reduzir uma planta ou desenho, isto é, fazer uma cópia cujas dimensões lineares estejam para

as do original numa escala ou relação dada $\frac{m}{n}$, pode-se empregar com vantagem o methodo dos quadrados (106).

Começa-se, pois, por cobrir a planta ou a figura a copiar com pequenos quadrados, conforme foi indicado.

Depois constroe-se sobre o papel que deve receber a cópia um rectangulo cujos lados estejam para os do primeiro como *m* está para *n*. Divide-se este rectangulo em tantos quadrados quantos tem o primeiro, e não restará mais do que traçar em cada um delles os pontos que se acham nos quadrados correspondentes do original, o que se pode fazer á simples vista si os quadrados forem bastante pequenos e si não houver necessidade de uma grande exactidão. O papel quadriculado presta-se muito a tal operação. Querendo-se, porém, referir mais exactamente cada ponto, pode-se fazer uso do *compasso de reducção* (Fig. 71). Este instrumento é formado de dois ramos iguaes A A′ e B B′, graduados e terminados em ponta, que se podem cruzar até o ponto que se queira por meio de ranhuras praticadas no corpo de cada ramo.

Nestas condições, tem-se sempre $OA = OB$, e por conseguinte $OA' = OB'$. Para utilizal-o, deve-se pois ajustar os dois ramos de tal sorte que seja $\frac{OA}{OA'} = \frac{m}{n}$; e é claro que então, para cada abertura do compasso, a relação do afastamento das pontas A e B para o afastamento das pontas A′ e B′ será tambem igual a $\frac{m}{n}$. Procede-se em seguida, conforme indicamos no numero (106), medindo no original a distancia de cada ponto á horizontal e á vertical vizinha dos pontos A e B, e referindo estas distancias sobre a cópia aos pontos A′ e B′.

120 — THEOREMAS COMPLEMENTARES Á THEORIA DA SIMILHANÇA. Para instituir a similhança alem do processo geral já indicado, que consiste como vimos em decompor o polygono considerado em triangulos, pode-se tambem julgar a similhança por dois outros modos, donde resultam outros tantos proces-

sos muito usuaes para se construir uma figura plana similhante á outra.

I. O primeiro modo consiste em reconhecer que *os vertices de dois polygonos similhantes podem ser determinados por triangulos respectivamente similhantes que têm em cada figura uma base commum.*

Com effeito, sejam A B C D E F e A′B′C′D′E′F′ (Fig. 72) dois polygonos similhantes, e M N e M′N′ duas linhas homologas.

Unindo as extremidades de M N aos differentes vertices do polygono A B C D E F e as extremidades de M′N′ aos differentes vertices do polygono A′B′C′D′E′F′, formaremos os triangulos M N A, M N B, M N C, M N D, M N E, M N F e M′N′A′, M′N′B′, M′N′C′, M′N′D′, M′N′E′ e M′N′F′. E′ facil de mostrar que os differentes pares de triangulos M N A e M′N′A′, M N B e M′N′B′, M N C e M′N′C′, M N D e M′N′D′, M N E e M′N′E′, M N F e M′N′F′ são similhantes.

Effectivamente, para o primeiro par, os lados M N, M′N′ e A M, A′M′ sendo homologos, os vertices dos angulos A M N e A′M′N′ tambem são homologos. Tem-se então

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{A'M'} \text{ e } \wedge AMN = \wedge A'M'N'.$$

Do mesmo modo demonstrariamos a similhança dos triangulos M N B e M′N′B′, M N C e M′N′C′, M N D e M′N′D′, M N E e M′N′E′ e M N F e M′N′F′.

Consideremos o par de triangulos M N B e M′N′B′. Os pontos M e M′, N e N′, B e B′ sendo homologos, as rectas M N e M′N′, M B e M′B′, N B e N′B′, e portanto os vertices dos angulos B M N e B′M′N′ e B N M e B′N′M′ tambem são homologos.

Teremos portanto

$$\wedge BMN = \wedge B'M'N' \text{ e } \wedge BNM = \wedge B'N'M',$$

o que em virtude do primeiro theorema de Thales, conduz a

$$\wedge MBN = \wedge M'B'N'.$$

Ora, estes triangulos tendo os angulos respectivamente iguaes são similhantes.

Do mesmo modo demonstrariamos a similhança dos triangulos MNC e M'N'C' etc...

Assim pois, os vertices dos dois polygonos similhantes são determinados por triangulos respectivamente similhantes que têm em cada figura uma base commum.

A reciproca deste theorema tambem é verdadeira: *Dois polygonos* ABCDEF e A'B'C'D'E'F' (Fig. 72) *serão similhantes quando juntando em cada um as extremidades* M *e* N, M' *e* N' *de duas rectas* MN *e* M'N' *com todos os vertices destes polygonos, os triangulos assim formados forem respectivamente similhantes e similhantemente dispostos sobre as bases communs* MN *e* M'N'.

Com effeito, pode-se considerar os seus lados AB e A'B', BC e B'C'... como rectas homologas em relação aos triangulos similhantes AMN e A'M'N', BMN e B'M'N' etc..., portanto todos estes lados são proporcionaes. Vê-se em seguida que os triangulos ABM e A'B'M' sendo similhantes por terem um angulo $M = M'$ comprehendido entre dois lados proporcionaes MA e M'A' e MB e M'B', o angulo $MAB = M'A'B'$. Por um motivo analogo o angulo $NBC = N'B'C'$, e como o angulo $MBN = M'B'N'$ e $MBA = M'B'A'$, segue-se que o angulo total $B = B'$. Provar-se-ia do mesmo modo que todos os outros angulos C e C', D e D',... dos dois polygonos são iguaes respectivamente, e que por conseguinte os dois polygonos são similhantes.

Problema: Este theorema fornece um modo usual de construir um polygono similhante a outro dado. E' sobretudo o que se emprega quando se faz um levantamento pelo *methodo das intersecções*, conforme indicamos nos n.os 66 e 114. Si o

instrumento empregado fôr o *graphometro*, obtem-se facilmente o polygono pedido. Este modo é tambem muito vantajoso nas cópias graphicas.

Seja proposto, por exp., sobre uma recta dada $a' b'$ construir um polygono similhante a ABCDEF (Fig. 73), suppondo $a' b'$ homologo a AB.

Em lugar de decompor o polygono dado em triangulos por meio de diagonaes, e construir successivamente outros similhantes, pode-se empregar este processo que é principalmente vantajoso quando o lado $a' b'$, homologo a AB, não precisa ter posição determinada.

Tome-se sobre AB o comprimento $A b' = a' b'$, e trace-se por b' a recta $b' c'$ parallela a BC; por C' a recta $c' d'$ parallela a CD, e tambem $d' e'$, $e' f'$ parallelas a DE e EF. O polygono $A b' c' d' e' f'$ será similhante ao dado, porque os vertices de ambos podem ser determinados por triangulos similhantes, tendo em cada figura uma base commum.

Neste caso, applicamos o lado dado $a' b'$ sobre o lado AB do polygono proposto; poder-se-ia tambem dispol-o parallelamente áquelle lado e realizar a construcção de modo analogo, o que daria o polygono similhante *a b c d e f*.

II. O segundo modo exige que se faça intervir condições de posição para apreciar a similhança das formas polygonaes consideradas. Consiste em julgar a similhança pela paridade de aspecto sob que são vistas as duas figuras quando dispostas convenientemente. E' facil de mostrar, com effeito, que *dois polygonos similhantes, sendo collocados em situação parallela, as rectas que unem os vertices homologos convergem todas para um mesmo ponto* (chamado centro de homologia) *cujas distancias a dois quaesquer desses vertices ficam numa relação igual á razão de similhança dos dois polygonos propostos.*

Para demonstrar este theorema, tomemos os polygonos similhantes ABCDEF e $A'B'C'D'E'F'$ (Fig. 74) que se acham collocados em situação parallela, para o que basta

suppor que dois pares de lados homologos quaesquer sejam respectivamente parallelos; seja O o ponto de intersecção das rectas que unem os dois pares de vertices homologos A e A′, B e B′.

Teremos $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = n$ (razão de similhança dos dois polygonos).

Vamos provar que a recta de juncção dos vertices homologos C e C′ passa no ponto O, e que $\frac{OC}{OC'} = n$.

Supponhamos que essa recta encontre OB num ponto M: A similhança obrigada dos triangulos BCM e B′C′M′ nos dá $\frac{BM}{B'M} = \frac{BC}{B'C'} = n$.

Mas, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = n$;

logo $\frac{BM}{B'M} = \frac{BO}{B'O}$ ou $\frac{BO+OM}{B'O+OM} = \frac{BO}{B'O}$

ou

$$(BO + OM)\,B'O = (B'O + OM)\,BO$$

ou

$$BO \times B'O + OM \times B'O = B'O \times BO + OM \times BO$$

ou

$$OM \times B'O = OM \times BO$$

ou

$$B'O = BO:$$

absurdo geometrico, proveniente de se ter supposto que a recta de juncção dos pontos C e C′ encontrava OB no ponto M e não em O.

Estando assim demonstrado que essa recta passa no ponto O, e que $\frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'} = n$, de modo identico provariamos

que a recta de juncção dos vertices D e D′ tambem passa no ponto O, e que $\frac{OD}{OD'} = n$; e assim por diante (9 b).

Reciprocamente, *quando de um ponto qualquer tomado dentro ou fora do polygono se tiram diagonaes ou rectas para todos os seus vertices, e si de cada uma dessas linhas á seguinte se traça successivamente uma recta parallela ao lado comprehendido entre ellas, a serie destas linhas formará um outro polygono similhante ao proposto.*

1.º Supponhamos a principio que o ponto O está dentro do polygono. Em virtude da construcção da Fig. 75, formaremos dois polygonos compostos de igual numero de triangulos dispostos similhantemente em torno do ponto O, e similhantes dois a dois. Porque o triangulo A O B será similhante a *a* O *b*; o triangulo B O C será similhante a *b* O *c*; o triangulo C O D será similhante a *c* O *d*, etc...

Os angulos internos homologos dos dois polygonos serão iguaes entre si, visto como cada um é a somma de dois outros homologos, pertencendo a triangulos similhantes entre si.

Comparando cada triangulo com o seu correspondente, teremos as proporções:

$$AB:ab::BO:bO$$
$$BO:bO::BC:bc$$
$$BC:bc::CO:cO$$
$$CO:cO::CD:cd$$
$$CD:cd::DO:dO$$
$$DO:dO::DE:de \text{ etc.}$$

Todas estas proporções tendo uma razão commum formarão uma só, que nos mostra existir uma relação constante entre dois lados correspondentes quaesquer fazendo parte dos

(9 b) R. Trompowsky — Revista didactica — anno IV, n.º 11.

contornos dos dois polygonos, do mesmo modo que entre duas linhas quaesquer tiradas de dois vertices homologos para o centro commum aos mesmos polygonos.

De mais, comparando os dois triangulos B O C e b O c, vê-se que tendo angulos iguaes comprehendidos entre lados proporcionaes devem ser similhantes; e que assim, a relação constante que existe entre dois lados quaesquer dos contornos dos dois polygonos terá tambem lugar entre as duas diagonaes A C e *a c*. O mesmo acontece quando se comparam duas outras diagonaes correspondentes, como B D e *b d*, C E e *c e;* do mesmo modo que entre as diagonaes correspondentes que subtendem ao mesmo tempo dois ou mais angulos, por exp., três como A D e *a d*, A E e *a e*, B E e *b e*, e assim as outras.

Por conseguinte, obteremos dois polygonos que são similhantes em todas as suas partes; donde resulta, mais geralmente, que *duas figuras rectilineas serão similhantes quando, collocadas em situação parallela, acontecer que as rectas tiradas pelos vertices correspondentes concorram num mesmo ponto* (9 c).

2.º Si o ponto O fica situado fóra dos polygonos, o theorema não é menos verdadeiro. Porque formaremos assim uma serie de triangulos similhantes tendo todos um vertice commum em O. Do parallelismo de suas bases e da proporcionalidade dos outros lados homologos resulta immediatamente a similhança dos dois polygonos.

Problema: Esta proposição fornece um *outro meio de construir um polygono que seja similhante a outro dado.*

(9 c) A posição assignalada aos dois polygonos similhantes ABCDEF e *abcdef* serve de base á construcção do *pantographo* (do grego *pantos* tudo e *graphó* escrevo), de que damos uma descripção na nota E, e que é um instrumento destinado a copiar mecanicamente toda especie de desenhos ou gravuras, reduzindo-as numa relação dada.

Assim como a coincidencia de duas figuras prova a sua perfeita igualdade, assim tambem duas figuras serão similhantes desde que fôr possivel assignar-lhes a posição concentrica ou o *centro de homologia* a que se refere a proposição acima.

Seja este ABCDE (Fig. 76), e dos seus vertices A, B, C, D e E tirem-se rectas para um ponto qualquer O; e a partir delles tomem-se sobre estas rectas as distancias A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, iguaes entre si e de uma grandeza arbitraria, conforme a escala que se quiser. Unindo os pontos assim determinados, obtem-se um polygono, e é evidente que este será tanto menor quanto maior fôr a distancia tomada sobre as rectas convergentes OA, OB etc., chamadas *raios vectores* (por analogia com as radiações luminosas do Sol); porque tal distancia representa o denominador da fracção que exprime a *razão de similhança* dos dois polygonos, sendo o numerador expresso pela distancia total de um dos vertices do primeiro ao *centro de homologia.*

Duas figuras dispostas deste modo são chamadas *homotheticas*, isto é, similhantes e similhantemente collocadas.

Notemos ainda que os dois theoremas precedentes podem ser estendidos ás figuras curvilineas, permittindo tambem apreciar a sua similhança. E elles convêm mais neste caso do que qualquer outra propriedade, visto serem naturalmente independentes do numero e da grandeza dos elementos triangulares (A. Comte). Assim é que, em virtude do segundo theorema, sendo dada uma curva plana (Fig. 77), si tomarmos um ponto O em posição qualquer, e o ligarmos por meio de rectas a uma serie de pontos da curva, tão aproximados quanto possivel, torna-se evidente que se terá uma outra curva similhante e similhantemente collocada em relação ao ponto escolhido, unindo todos os pontos que forem obtidos pela divisão dos raios vectores em partes proporcionaes.

E' obvio que a curva assim determinada será tanto menor que a proposta quanto maior fôr a distancia commum que tomarmos sobre estes raios vectores a partir dos pontos desta ultima; e a relação de grandeza que existir entre ambas será dada pela relação entre o comprimento total de um dos raios vectores e a distancia tomada sobre elle.

Reciprocamente, *quando duas curvas, collocadas paralle-*

lamente, tiverem os respectivos pontos a distancias constantemente proporcionaes do centro de convergencia dos seus raios vectôres, serão ellas similhantes.

Alem da similhança das curvas planas, o 2.º theorema nos conduz espontaneamente á apreciação da similhança e igualdade das superficies polyedricas. Com effeito, si os dois polygonos similhantes, em situação parallela, não se acharem no mesmo plano, é evidente que as rectas que unirem seus vertices com o centro de comparação ou convergencia, formarão uma superficie limitada pelos planos que as contêm. A superficie polyedrica, assim obtida, limitará evidentemente o que se chama uma *pyramide* si os polygonos dados forem apenas similhantes; mas si alem disso elles forem iguaes, ella encerrará evidentemente o que se denomina um *prisma*, caso em que se pode suppôr que o centro de convergencia se acha a uma distancia infinita da base da pyramide. A *pyramide* e o *prisma* são os polyedros mais simples; e como o seu estudo exige naturalmente o das propriedades das *superficies planas* que os limitam, devemos apreciar-as préviamente.

E' o que faremos no paragrapho seguinte.

Questões sobre a primeira parte do Preambulo

1.ª *Questão. Demonstrar que o producto de dois lados de um triangulo equivale ao quadrado da bissectriz do seu angulo interno augmentado do producto dos dois segmentos que a mesma bissectriz determina sobre o terceiro lado. Generalizar a questão para o caso da bissectriz do angulo externo.*

Solução. 1.ª Consideremos o triangulo ABC (Fig. 78); tracemos a bissectriz BD do angulo interno ABC, e baixemos do ponto B a perpendicular BE.

Façamos $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = d$, $DE = e$, $AD = m$, $CD = n$ e $BE = h$.

No triangulo rectangulo BCE temos

$$a^2 = h^2 + (n - e)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = h^2 + n^2 - 2ne + e^2.$$

Mas o triangulo rectangulo BDE nos dá $d^2 = h^2 + e^2$; logo

$$a^2 = d^2 + n^2 - 2ne, \quad \text{donde} \quad e = \frac{d^2 + n^2 - a^2}{2n}. \quad (1)$$

Por outro lado, temos no triangulo rectangulo ABE

$$c^2 = h^2 + (m + e)^2 \quad \text{ou} \quad c^2 = h^2 + m^2 + 2me + e^2,$$

ou por ser $h^2 + e^2 = d^2$,

$$c^2 = d^2 + m^2 + 2me,$$

donde $$e = \frac{c^2 - d^2 - m^2}{2m}. \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2) tiramos

$$\frac{c^2 - d^2 - m^2}{2m} = \frac{d^2 + m^2 - a^2}{2n}$$

ou $$(c^2 - d^2 - m^2)n = (d^2 + n^2 - a^2)m$$
ou $$c^2n - d^2n - m^2n = d^2m + n^2m - a^2m$$
ou $$c^2m + a^2m = d^2m + d^2n + n^2m + m^2n$$
ou $$c.cn + a.am = d^2(m + n) + mn(m + n). \quad (3)$$

Mas vimos que a bissectriz BD do angulo B divide o lado AC em partes directamente proporcionaes aos lados que comprehendem esse angulo (103),

isto é $$m:n::c:a, \quad \text{donde} \quad am = nc.$$

Substituindo, pois, na igualdade (3) *cn* por *am* e *am* por *cn*, virá

$$c.am + a.cn = (d^2 + mn)(m + n)$$
ou $$ac(m + n) = (d^2 + mn)(m + n)$$
ou $$ac = d^2 + mn \quad (4)$$

o que queriamos demonstrar.

2.º Consideremos agora o caso da bissectriz BD′ do angulo externo CBA′ (Fig. 78). Si fizermos $BD' = d'$, $AD' = m'$, $CD' = n'$ e $D'E = e'$, o triangulo rectangulo BCE nos dará:

$$a^2 = h^2 + (e' - n')^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = h^2 + e'^2 - 2e'n' + n'^2.$$

Mas o triangulo rectangulo BDE′ nos dá tambem $d'^2 = h^2 + e'^2$; logo

$$a^2 = d'^2 - 2e'n' + n'^2, \quad \text{donde} \quad e' = \frac{d'^2 + n'^2 - a^2}{2n}. \quad (1)$$

Por outro lado, temos no triangulo rectangulo ABE

$$c^2 = h^2 + (m' - e')^2 \quad \text{ou} \quad c^2 = h^2 + m'^2 - 2m'e' + e'^2,$$

ou por ser $h^2 + e'^2 = d'^2$, virá

$$c^2 = d'^2 + m'^2 - 2m'e', \quad \text{donde} \quad e' = \frac{d'^2 + m'^2 - c}{2m'}. \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2) tiramos

$$\frac{d'^2 + m'^2 - c^2}{2m'} = \frac{d'^2 + n'^2 - a^2}{2n'}.$$

ou $(d'^2 + m'^2 - c'^2)\,n' = (d'^2 + n'^2 - a^2)\,m'$

ou $d'^2 n' + m'^2 n' - c^2 n' = d'^2 m' + n'^2 m' - a^2 m'$

ou $a^2 m' - c^2 n' = d'^2 m' - d'^2 n' + n'^2 m - m'^2 n'$

ou $a.\,am' - c.\,cn' = d'^2 (m' - n') - m'n'(m' - n').$ (3)

Mas sabemos que a bissectriz B D′ do angulo C B A′ encontra o lado A C prolongado no ponto D′, de maneira tal que A D′ e C D′ são directamente proporcionaes a A B e B C,

isto é, $m' : n' :: c : a$; donde $am' = cn'$.

Substituindo, pois, na igualdade (3), *am′* por *cn′* e *cn′* por *am′*, acharemos

$a.\,cn' - c.\,am' = (d'^2 - m'n')\,(m' - n')$

ou $ac\,(n' - m') = (m'n' - d'^2)\,(n' - m')$

ou $ac = m'n' - d'^2$ (8):

donde vemos que neste caso *o producto de dois lados do triangulo é igual ao producto dos dois segmentos subtractivos determinados pela bissectriz do angulo externo, menos o quadrado dessa bissectriz.*

Este theorema e o precedente permittem calcular os comprimentos das bissectrizes em formação dos lados do triangulo. Assim, para calcular a bissectriz $AD = d$ do angulo interno B A C, basta substituir na relação $bc = d_1^2 + DB.DC$

os segmentos DB e DC por seus valores, que se deduzem da proporção conhecida $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b}$; donde se terá em virtude de uma propriedade das proporções

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{b + c} = \frac{a}{b + c}.$$

Acha-se assim, feitas as reducções e designando por p o semi-perimetro do triangulo, $d_1 = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$. Si o triangulo fôr isosceles, isto é, $a = b$, virá, $d_1 = \sqrt{\left(c + \frac{b}{2}\right)\left(c - \frac{b}{2}\right)}$; si fôr equilatero, virá: $d_1 = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, o que mostra ser a bissetriz incommensuravel com o lado.

Um calculo analogo dar-nos-ia para a bissectriz $AD' = d'_1$ do angulo exterior

$$d'_1 = \frac{2}{c-d}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

Por exemplo, para as bissectrizes interiores, d_1, d_2, d_3, e para as bissectrizes exteriores d'_1, d'_2, d'_3, do triangulo cujos lados são, 13, 6 e 9, obteremos com aproximação de 1 millesimo

$d_1 = 3{,}883$ $\quad d_2 = 7{,}778$ $\quad d_3 = 10{,}407$
$d'_1 = 30{,}983$ $\quad d'_2 = 7{,}137$ $\quad d'_3 = 12{,}093$

No caso de ser isosceles o triangulo considerado, bastará fazer $a = c$ nas formulas acima, para obter o valor da bissectriz procurada, que será então uma perpendicular; visto como sendo $m = n$, se terá então $a^2 = d^2 + m^2$, o que nos mostra ser d um dos cathetos de um triangulo rectangulo.

Observação: Das equações $ac = d^2 + mn$ e $ac = m'n' - d'^2$, tiramos

$$d^2 + mn = m'n' - d'^2 \quad \text{ou} \quad d^2 + d'^2 = m'n' - mn;$$

mas vê-se que $d^2 + d'^2 = (n + n')^2$, isto é que as duas bissectrizes são perpendiculares, como nos mostra o triangulo rectangulo D B D'. Logo

$$(n + n')^2 = m' n' - mn$$

relação entre as distancias dos vertices A e C aos pés das bissetrizes rectangulares B D e B D'.

2.ª *Questão*. Provar que *em todo triangulo* A B C (Fig. 79) *a somma dos quadrados de dois lados* A B e A C *é igual ao dobro da somma do quadrado da metade do terceiro lado, com o quadrado da mediana* A D *relativa a este terceiro lado* B C.

Demonstração. Baixemos do vertice A a perpendicular A I sobre o lado opposto B C, o que determinará os segmentos B I e I C, que são chamados as projecções dos dois outros lados A B e A C sobre esta base B C. Isto posto, em virtude do ultimo theorema do numero 105, os triangulos B D A e C D A dar-nos-hão respectivamente

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DI$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DI.$$

Mas $CD = BD$: assim, juntando estas igualdades membro a membro, virá

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD},$$

isto é, $$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2},$$

o que demonstra o theorema.

Observação. Este theorema permitte calcular *as medianas de um triangulo em formação dos lados*.

Com effeito, representando por *m* a mediana relativa ao lado B C, e attendendo que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$$

teremos, chamando a, b e c os tres lados,

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m^2,$$

donde se tira

$$m_1^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

de sorte que *o quadrado de uma mediana é igual á semisomma dos quadrados dos dois lados adjacentes, menos o quadrado da metade do terceiro lado.* Assim, pois, virá finalmente

$$m_1=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)a^2} \quad (3)$$

Por exemplo, para as medianas m_1, m_2, m_3, do triangulo cujos lados são 13, 9 e 6^m, encontraremos

$$m_1=4{,}031 \qquad m_2=9{,}069 \qquad \text{e} \qquad m_3=10{,}770,$$

com aproximação de um millesimo.

3.ª *Questão.* Provar que *a differença dos quadrados de dois lados de um triangulo é igual as duplo producto do terceiro lado pela projecção da mediana correspondente sobre este mesmo lado: achar por este meio a expressão da differença entre a mediana m e a altura h do triangulo, em formação dos seus lados.*

Demonstração. Seja ABC o triangulo proposto (Fig. 80), e teremos, em vista das relações já obtidas no n.º 105,

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2\,\overline{AD}.DE \text{ e } \overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+2\,\overline{CD}.DE;$$

subtrahindo a primeira da segunda, e observando que $AD=CD$, virá:

$$\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=4\,\overline{AD}.DE \quad \text{ou} \quad \overline{BC}^2-\overline{AB}^2=2\,\overline{AC}.DE;$$

isto é, $a^2 - c^2 = 2b . DE.$

Consequencia. A expressão precedente nos dá $DE = \frac{a^2 - c^2}{2b}$, e portanto $\overline{DE}^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{4b^2}$.

Mas, o triangulo rectangulo BDE (Fig. 80) nos mostra que $DE^2 = m^2 - h^2$, ou $P = (m + h)(m - h)$, chamando P a projecção DE da mediana $BD = m$, e *h* a altura BE. Da ultima equação deduz-se: $m - h = \frac{P^2}{m + h}$ ou $d = \frac{P^2}{m + h}$, chamando *d* a differença procurada. Substituindo nesta formula a expressão de P^2, obtida precedentemente, e a de m^2 achada acima (2.ª), bem como a de *h* citada no numero 105, teremos

$$d = \frac{\frac{(a^2 - c^2)^2}{4b^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}$$

ou

$$d = \frac{(a^2 - c^2)^2}{2b^2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + 2b\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}},$$

expressão procurada.

Si o triangulo fôr isosceles ou equilatero, será $a = c$, e virá então $d = o$.

4.ª *Questão.* Provar que *a somma dos quadrados dos quatro lados de um quadrilatero qualquer* ABCD (Fig. 81) *é igual á somma dos quadrados de suas diagonaes, mais o quadrado do dobro da recta IK* (ou 4 vezes esta recta) *que junta os meios destas.*

Demonstração: Ligando o meio I de uma destas diagonaes aos dois extremos oppostos B e C da outra, os dois triangulos ABD e ACD ahi formados darão respectivamente, em virtude do theorema precedente, por serem BI e IC medianas,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{BI}^2 + 2\overline{AI}^2 \quad \text{e} \quad \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{CI} + 2\overline{AI}^2;$$

addicionando estas duas igualdades membro a membro, virá:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{BI}^2 + 2\,\overline{CI}^2 + 4\,\overline{AI}^2 \quad (1).$$

Como, porém, no triangulo B I C a recta I K vai do vertice I ao meio do lado opposto B C, teremos ainda

$$\overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = 2\,\overline{IK}^2 + 2\,\overline{BK}^2,$$

e por conseguinte

$$2\,\overline{BI}^2 + 2\,\overline{CI}^2 = 4\,\overline{IK}^2 + 4\,\overline{BK}^2.$$

Portanto, substituindo na igualdade (1), virá:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 4\,\overline{IK}^2 + 4\,\overline{BK}^2 + 4\,\overline{AI}^2;$$

porem, $4\,\overline{IK}^2$ é o quadrado de $2\,IK$; $4\,\overline{BK}^2$ e o de $2\,BK$, isto é de B C, e pela mesma razão $4\,\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2$: teremos, pois, finalmente

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = (2\,IK)^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 \quad (2) \text{ c. q. d.}$$

Si o quadrilatero A B C D fosse um trapezio, a recta I K seria igual á semi-differença dos lados parallelos; suppondo que fossem estes A B e C D, teriamos pois $AB - CD = 2IK$. Elevando esta differença ao quadrado, e substituindo-a na igualdade (2), obtem-se

$$a^2 + c^2 + b + B^2 = d^2 + d'^2 + B^2 + b^2 - 2Bb = d^2 + d'^2 + (B - b)^2,$$

que comprehende como caso particular a que já obtivemos para o trapezio.

Si o quadrilatero proposto fosse um parallelogrammo, seria $IK = O$, e a igualdade (2) nos mostraria que, neste caso,

a somma dos quadrados dos lados é igual á somma dos quadrados das diagonaes, e reciprocamente, si a somma dos quadrados dos lados de um quadrilatero fôr igual á somma dos quadrados das diagonaes, este quadrilatero será um parallelogrammo.

5.ª *Questão* (pratica). *Prolongar uma recta alem de um obstaculo que a intercepte.* Consideremos a recta A B (Fig. 82) traçada no terreno, a qual se quer prolongar alem de um obstaculo M. Para isto, traça-se sobre o terreno uma recta A L, passando ao lado do obstaculo.

Num ponto B′ desta recta eleva-se uma perpendicular que vai encontrar a recta A B no ponto B; escolhendo-se o ponto B′ de maneira que o ponto B fique o mais longe possivel de A, antes do obstaculo. Medem-se as linhas A B′ e B′ B; seja por ex: $AB = 150^m$ e $BB' = 68^m$. Toma-se em seguida sobre A L um segundo ponto C′ tal que a perpendicular C′ C, elevada neste ponto sobre A L, passe adiante do obstaculo; seja por exemplo $AC' = 280^m$.

Vejamos como se pode calcular a distancia C C′ do ponto C′ ao ponto em que esta perpendicular encontra o prolongamento de A B. Os triangulos A C C′ e A B B′ sendo similhantes, tem-se $\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB}$ ou $\frac{CC'}{AC'} = \frac{BB'}{AB'}$, ou emfim $\frac{CC'}{280} = \frac{68}{150}$,

donde
$$CC' = \frac{280 \times 68}{150} = 126{,}933.$$

Assim pois, basta tomar sobre C C′, a partir de C′, um comprimento igual a 126,933, para haver determinado o ponto C, situado sobre o prolongamento de A B. Determinar-se-ha do mesmo modo outros pontos D, E... situados tambem sobre o prolongamento de A B; tomando por exemplo

$AD' = 390^m$ $\quad DD' = 176^m{,}80$

$AE' = 480^m$ $\quad EE' = 217^m{,}60$

estes três pontos deverão achar-se em linha recta.

O processo que acabámos de indicar é preferivel a um outro muito usual, que consiste em construir um rectangulo de que a recta prolongada seja um dos lados. Porque o menor erro ahi commettido na direcção de uma das quatro perpendiculares, sobretudo na primeira, mudará notavelmente a direcção da linha procurada. Ao contrario, no methodo que acabámos de indicar, um pequeno erro na direcção das perpendiculares não produz senão um deslocamento insignificante dos pontos C, D e E, e não altera sensivelmente a posição da recta C D E.

6.ª *Questão* (pratica). *Medir a distancia de um ponto* A *a outro* B (Fig. 83), *visivel de* A, *porém separado do primeiro por um obstaculo, um rio por exemplo.*

Solução. Escolhe-se sobre o terreno uma base A C que se mede com cuidado; com um graphometro ou outro instrumento medem-se os angulos B A C e B C A. Reduzindo A C a uma escala conveniente, constroe-se sobre o papel um triangulo *d e f* similhante a A B C, e mede-se a recta *d e*, que por meio da escala adoptada nos dará a distancia pedida.

Si não se dispuser do graphometro, pode-se determinar os angulos A e C do triangulo B A C, medindo com a trena ou com a fita metrica os três lados dos pequenos triangulos A A′ A″, C C′ C″, e construindo ainda, sob uma escala conveniente, o triangulo *d e f* similhante a A B C.

Esta solução substitue com vantagem a que foi dada na nota 7 d (§ 7.º).

7.ª *Questão* (pratica). *Medir a distancia entre dois pontos, ambos inaccessiveis.*

Solução. Seja proposto medir a distancia entre os dois pontos A e B (Fig. 84) dos quaes não nos podemos aproximar, existindo por exemplo um rio entre elles e nós. Traça-se e mede-se sobre o solo uma base horizontal C D; colloca-se o graphometro em C, e medem-se os angulos A C D e B C D. Em seguida estaciona-se o mesmo instrumento em D, e medem-se os angulos A D C e B D C.

Os dois triangulos ACD e BCD estando determinados por meio de um lado e dos dois angulos adjacentes, so resta construir sobre o papel, com uma escala conveniente, os dois triangulos *acd* e *bcd*, similhantes áquelles, e medir ahi a recta *ab*. Este valor nos dará a distancia pedida por meio da relação de similhança adoptada.

CAPITULO IV.

Aggregado de planos formando polyedros; medida das rectas em planos diversos.

§ 10.º

Determinação dos planos e seus diversos modos de geração; propriedades desta superficie.

121. — Até aqui temos estudado os conjuntos rectilineos a duas dimensões, isto é, aquelles cujos elementos se acham todos comprehendidos em um só plano. Cumpre, todavia, reconhecer que este caso é o mais particular, visto como a medida indirecta dos comprimentos rectilineos se effectua quasi sempre considerando as linhas em mais de um plano. As figuras reversas assim formadas caracterizam ordinariamente os casos naturaes, ao passo que os grupos planos não são de facto proprios sinão aos typos artificiaes.

Todas as soluções do problema fundamental sobre a medida indirecta das linhas rectas ficariam pois insufficientes si não fossem estendidas ás figuras de três dimensões. Aliás, o estudo da similhança dos polygonos já nos conduziu espontaneamente á consideração de taes formas (116), as quaes sendo então compostas de um aggregado de planos, receberam por isso o nome de *polyedros*. (10 a)

(10 a) «On voit ainsi confirmée la necessité de renoncer, dès la première partie du préambule géométrique, aux images extérieures, dont l'usage devrait déjà cesser envers la seconde,

A. G. MONGE

De accôrdo com o preceito logico que nos leva a reduzir as questões mais complexas ás mais simples, procurou-se naturalmente fazer depender o estudo dos polyedros da apreciação mais elementar relativa aos polygonos planos.

Em virtude da natureza desta questão, este primeiro caso, embora particular, tornou-se mais desenvolvido do que o caso geral a que normalmente serve de base, como acontece quasi sempre com as questões preparatorias; e um tal desenvolvimento conduziu espontaneamente ao estudo da superficie plana.

Vemos assim que, por serem os polyedros um aggregado de polygonos planos, torna-se o triangulo o elemento basico dos compostos geometricos. De sorte que a theoria das figuras rectilineas é essencialmente reductivel ao typo triangular, onde a condição plana se acha preenchida de modo espontaneo. Estendida aos polygonos quaesquer, vimos que esta theoria faz logo sentir a necessidade de ser completada, sobretudo para a similhança, pelo exame dos aggregados de linhas cujos triangulos elementares constituem planos differentes.

O estudo da superficie plana torna-se assim uma transição necessaria entre a apreciação dos *polygonos* e a dos *polyedros*, por isso que o plano representa, neste segundo caso do problema, o mesmo officio que vimos ter o triangulo no primeiro.

Assim pois, este segundo capitulo do preambulo geometrico, normalmente destinado a completar o primeiro, deve começar instituindo a theoria da superficie plana, que se funda immediatamente sobre a theoria da linha recta no caso polygonal. Uma ligação directa e geral existe entre ambas, em virtude de seu destino commum, para a medida graphica ou algebrica dos comprimentos rectilineos.

I. *Definição primitiva do plano.* A concepção da superficie

á la fin de la même semaine. Si les maîtres et les élèves employaient cette vicieuse assistance pour étudier la ligne droite et les polygones, ils deviendraient aussitôt inconséquents en s'abstenant d'y recourir dans la théorie plus difficile de la surface plane et des polyièdres.» (A. Comte — Synth. Subject.)

plana é emanada da observação espontanea, que nos apresenta esta superficie como sendo *aquella na qual se póde applicar uma linha recta em qualquer sentido*. Comecemos por apreciar as principaes consequencias desta definição vulgar do plano. Della resulta immediatamente que *uma recta que tem dois pontos em um plano existe toda nelle*, visto como sabemos que a linha recta fica sempre determinada por dois de seus pontos. A mesma recta pode entretanto ser concebida simultaneamente em infinitos planos, dos quaes constituirá a *intersecção* commum; e, reciprocamente, a intersecção dos planos é sempre rectilinea.

Estas observações mostram ao mesmo tempo que *três pontos não em linha recta determinam um plano;* porque todos os planos que passam por dois dos pontos dados conterão a recta que estes pontos determinam; e basta um novo ponto fóra da mencionada recta para fixar qualquer de taes planos no Espaço. Reconhece-se assim que *duas rectas que se cortam tambem determinam o plano que contiver uma e passar por um ponto da outra, distincto da intersecção de ambas.* É claro outrosim que a segunda recta, tendo desde então dois pontos no dito plano, existirá toda nelle. Imaginando agora que o ponto de intersecção se transporte ao infinito, as rectas se tornarão parallelas. Reconhece-se deste modo e *deductivamente*, conforme já o indicara a observação immediata, que *o plano é igualmente determinado por duas rectas parallelas.* Observemos emfim que *três rectas que se cortam mutuamente determinam tambem um plano;* pois que todas três existirão no plano que contiver uma e passar pela intersecção das outras duas. A proposição subsiste ainda no caso em que duas se tornam parallelas. No primeiro caso fica formado um triangulo; donde se conclue que o triangulo rectilineo é uma figura essencialmente plana. E como os polygonos e os polyedros quaesquer se decompõem em triangulos, essa figura, que é a mais simples que possamos conceber, constitue a base da theoria da medida dos comprimentos rectilineos. A theoria

preliminar da linha recta suppõe, portanto, tacitamente a apreciação das figuras planas.

Desde que consideremos quatro rectas, mesmo cortando-se duas a duas, ellas só excepcionalmente existirão em um plano.

Em geral, unindo-se dois vertices oppostos do quadrilatero assim formado, obtem-se dois triangulos existentes em planos differentes. Assim, a existencia de varias rectas que se cortam mutuamente, determina no caso commum uma superficie formada por um conjunto de polygonos planos, diversamente inclinados entre si. Si a reunião desses polygonos destaca uma porção do Espaço totalmente circunscripto por elles, a figura é o que chamamos polyedro; no caso contrario, tem-se um *polygono reverso*.

II. No meio da immensa variedade de superficies que podemos conceber, occupa o plano um lugar verdadeiramente notavel; quer pela sua importancia propria, quer pela sua simplicidade geometrica, que o faz erigir em typo normal de comparação relativamente ás outras superficies.

Similhante simplicidade, que já se releva na *geometria preliminar*, torna-se ainda mais sensivel na *geometria geral*, onde veremos que a equação correspondente ao typo plano é do primeiro gráo, ao passo que se torna de gráo superior para as outras superficies. Representando as imagens geometricas por meio de symbolos numericos, a *geometria algebrica* mostra assim que ás mais simples leis da forma correspondem sempre as mais elementares leis dos numeros.

III. A definição primittiva do plano permitte facilmente resolver o duplo problema que a passagem do abstracto ao concreto exige em relação aos typos geometricos. Por um lado, podemos assim reconhecer si uma superficie dada é plana; por outro lado, podemos executar na industria uma superficie plana. Comprehende-se, porém, que é necessario *regular* as experiencias e as observações requeridas em taes circunstancias, afim de evitar ensaios *insufficientes* ou *superfluos*. Isto

mostra que o estudo systematico do plano deve habilitar-nos a conceber as diversas maneiras pelas quaes o movimento de uma linha recta o pode gerar. De sorte que, em cada caso, possamos escolher entre essas gerações, qual a que mais se adapta ás nossas condições de verificação ou de execução.

Mas a necessidade de examinar assim as principaes gerações do plano justifica-se tambem por considerações de ordem logica. Pois que é essa uma «occasião de fazer naturalmente conhecer, desde o inicio, os principaes modos de geração das superficies quaesquer, donde deve resultar finalmente a taxonomia geometrica.» E, por outro lado, é esse o meio de ligar o conjunto das propriedades connexas da recta e do plano á definição desta superficie. Desde então, essas propriedades se nos offerecerão como os diversos accidentes de uma mesma apreciação, em vez de surgirem como theoremas destacados.

O estudo systematico do plano torna-se assim essencialmente reductivel, como o de qualquer outra superficie, aos seus diversos modos de geração pelo movimento de uma linha. A apreciação das suas propriedades essenciaes, sem excluir as consequencias da definição emanada da observação, pode, com effeito, ser deduzida dos diversos modos que comporta a sua geração pelo movimento de uma linha, em virtude da descoberta das principaes relações entre as rectas e os planos. Este estudo nos conduzirá ao das combinações dos planos entre si, que nos habilitará a substituir essas superficies pelo confronto de rectas convenientemente escolhidas. Tal será o objecto do segundo paragrapho deste capitulo, que terminará no terceiro com a theoria da igualdade, e sobretudo da similhança dos polyedros. (10 b)

122 — Geração das superficies e sua classificação: idéas

(10 b) Os antigos não filiaram o estudo do plano ao das outras superficies. O evidente contraste entre a *superficie plana* e as superficies não planas ou *curvas* levou-os naturalmente a separar as duas apreciações, como si nada houvesse de commum entre ellas. Mas o surto da *algebra* e o consequente desenvolvimento da *geometria moderna* vieram mostrar desde logo que a superficie plana pode ser considerada como caso particular das superficies curvas. Tal é

GERAES SOBRE A TAXONOMIA GEOMETRICA. I. Multiplos e variados são os modos de geração que comporta uma superficie qualquer; todos elles podem, porém, ser reduzidos a dois fundamentaes, que consistem em consideral-a como formada por pontos ou por linhas. Pelo primeiro modo póde-se conceber uma superficie como o lugar geometrico de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade. Pelo segundo pode-se definir a superficie como sendo o lugar geometrico das posições consecutivas de uma linha, variavel ou não de figura; isto é, engendrada pelo conjuncto de posições successivas de uma linha que se move segundo uma lei determinada. Assim, por exemplo, pode-se considerar a superficie da esphera como o lugar dos pontos igualmente distantes de um ponto fixo, ou como a superficie engendrada pela circumferencia de um circulo girando em torno de um de seus diametros, etc....

Dogmaticamente estes dois modos de geração, que se tornam por vezes necessarios para o perfeito conhecimento das superficies, podem ser instituidos ao mesmo tempo. Mas, historicamente um intervallo de seculos separou a creação do primeiro da systematização do segundo. Aquelle resultou da evolução geometrica peculiar á Grecia antiga, e a systematização deste constitue um dos ultimos fructos da elaboração mathematica propria á transição moderna.

O primeiro modo de definição das superficies resultou espontaneamente de uma simples extensão do que sempre se tem empregado para as *curvas*; mas o segundo é naturalmente proprio ás *superficies*, e só convem a ellas. Elle tira desta mesma particularidade um caracter especial que o torna preferivel ao outro, visto como a concepção de um objecto com-

---

um dos mais brilhantes resultados das concepções do illustre Gaspar Monge sobre a *geometria comparada* que representa, já no periodo da transição moderna, o ultimo passo da evolução mathemathica. O estudo deste dominio geometrico só poderá ser feito, de modo completo, depois do conhecimento da *geometria algebrica*. Mas segundo A. Comte, convem utilizar esta occasião para fazer conhecer desde já os principaes modos de geração das superficies, donde deve resultar sua classificação racional, que comprehende a superficie plana como caso particular.

posto que se quer definir torna-se tanto mais facil quanto menos longe pode ir a decomposição delle.

Embora as primeiras idéas sobre a geração das superficies pelo movimento das linhas tivessem surgido na antiguidade, só modernamente puderam ellas ser completadas e systematizadas por Gaspar Monge (1746-1818). Este illustre geometra francez procurou distribuir todas as superficies imaginaveis em um certo numero de grupos naturaes, de modo que as superficies de cada grupo apresentassem sempre entre si uma maior analogia do que duas superficies fazendo parte de grupos differentes. Para conseguir esta taxonomia geometrica elle estabeleceu *familias* naturaes entre as superficies, tendo em vista a geração dellas, sempre *definidas pela natureza e pelo movimento da linha geratriz*. Assim, concebendo uma superficie qualquer como o lugar geometrico das posições consecutivas de uma linha movel, elle procurou determinar, em cada caso, o movimento desta *linha geratriz* pela condição de encontrar constantemente uma ou mais linhas fixas chamadas directrizes. Nestas condições, conhecendo a geratriz e o seu movimento, basta evidentemente fazer variar a directriz para obter todas as especies de superficies de uma mesma familia.

II. Todas as familias de superficies podem ser classificadas em dois grandes grupos, conforme a geratriz é uma linha recta ou uma curva. As primeiras, chamadas *superficies rectilineas*, são as que podem ser geradas pelo movimento de uma linha recta segundo uma lei determinada; as segundas, denominadas *superficies curvas*, são as que podem ser geradas pelo movimento de uma curva variavel ou não de figura e sujeita a certas condições. Monge deu áquellas a denominação collectiva de *superficies regradas*, pelo facto de se lhes poder applicar uma regua, pelo menos na direcção da geratriz.

As superficies regradas podem ser por sua vez desenvolviveis ou não. Pertencem á ordem das superficies *desenvolviveis* as que podem ser desenvolvidas sobre um plano sem dobra nem ruptura; á ordem das não desenvolviveis ou *reversas*

pertencem as superficies que se acham no caso contrario e onde, por conseguinte, duas posições consecutivas da geratriz não ficam num mesmo plano.

1.º A ordem das superficies *desenvolviveis* comprehende três *familias* importantes, a saber: a das superficies *cylindricas*, *conicas* e de *aresta de reversão*. Chama-se *superficie cylindrica* a que é gerada por uma recta que se move parallelamente a si mesma, apoiando-se sempre sobre uma linha fixa qualquer. É a familia mais simples e mais geral de todas. Dá-se o nome de *superficie conica* á que é produzida por uma recta movel em torno de um ponto fixo, apoiando-se sempre sobre uma linha fixa qualquer. Denomina-se *superficie de aresta de reversão* á que é engendrada por uma recta que se move continuamente, tangenciando sempre uma curva não plana. Ella fica, pois, constituida por duas folhas separadas por esta curva, que sendo chamada *aresta de reversão* dá o nome collectivo á familia de taes superficies.

Veremos que, desprezando grandezas infinitamente pequenas no sentido perpendicular ás geratrizes, pode-se considerar duas destas consecutivas como se achando num mesmo plano, de sorte que assim se torna possivel desenvolver, sem dobra nem ruptura, os elementos successivos da superficie sobre o mesmo plano. Portanto, qualquer superficie desenvolvivel desta familia pode tambem ser concebida como engendrada pelo movimento de um plano movel cujas intersecções successivas representam as diversas posições da geratriz da superficie (10 c)

Suppondo que a curva de dupla curvatura, chamada *aresta de reversão*, fique reduzida a um ponto, obtem-se evidente-

---

(10 c) Como exemplo notavel desta familia de superficies, deve-se citar a que se chama *helicoide desenvolvivel*, que é o lugar das tangentes a uma mesma helice. Si por um ponto qualquer tomado fóra de uma superficie desenvolvivel desta familia, se tiram parallelas ás suas geratrizes, obtem-se um cone que se chama *cone director* da superficie, e cuja consideração torna-se util em diversas questões. Na *helicoide desenvolvivel* o cone director é um cone circular.

mente uma superficie conica. E por sua vez a superficie cylindrica pode tambem ser considerada como uma superficie conica cujo vertice se acha a uma distancia infinitamente grande; de sorte que se manifesta assim uma certa analogia entre as três familias de superficies desenvolviveis que temos definido.

2.º A ordem das superficies regradas *não desenvolviveis*, a que chamamos *reversas*, apresenta um grande numero de familias, entre as quaes sobresaem as das superficies *conoides* e a das *helicoides reversas*. Tem-se uma idéa geral das superficies reversas ou enviesadas, imaginando uma recta que se move sobre três directrizes fixas quaesquer. Pode acontecer que uma das directrizes seja rectilinea, ou mesmo que o sejam as três. No primeiro caso, as superficies obtidas têm o nome collectivo de *conoides;* e no segundo o de *hyperboloides de uma folha*. Si duas directrizes são linhas rectas, as superficies obtidas têm o nome de *paraboloides hyperbolicas* (10 d).

III. Quanto á classe mais variada das superficies *curvas*, é evidente que comprehende um numero infinito de *ordens*, porque a curva geratriz e o seu movimento podem variar infinitamente. Assim, as superficies curvas podem ser *circulares*, *parabolicas*, *hyperbolicas* etc..., conforme a curva geradora

---

(10 d) A denominação de *superficie conoide*, cujo sentido tem variado muito depois de Archimédes, está agora consagrada a designar a familia geometrica muito usada nas artes, e comprehendendo todas as superficies engendradas por uma recta que escorrega sobre um eixo fixo, ficando parallela a um mesmo plano, chamado *plano director*, qualquer que seja aliás a segunda directriz, que deve em cada caso completar a determinação do seu movimento. Aquella recta, escorregando sobre a segunda directriz curvilinea, descreve evidentemente uma superficie conica; de sorte que o nome de *conoide* lembra mui justamente uma comparação geometrica com as superficies conicas.

Entre as superficies conoides destaca-se uma muito empregada na construcção dos parafusos de filetes rectangulares e nas escadas de caracol sem aberturas lateraes. É engendrada por uma recta horizontal escorregando ao mesmo tempo sobre uma helice e sobre o eixo do cylindro vertical correspondente.

A superficie do *parafuso de filetes triangulares*, apesar de sua grande analogia com a precedente, não representa exactamente uma superficie conoide, porque o parallelismo continuo da geratriz ao plano da base do cylindro se acha ahi substituido por sua inclinação constante sobre o eixo, o que só reproduz o outro caso quando este angulo fôr recto. Tal superficie pertence á familia das *helicoides reversas*.

fôr um *circulo*, uma *parabola*, uma *hyperbole* etc..., e em cada um destes casos se pode conceber uma infinidade de *familias*, segundo a lei do movimento attribuido á geratriz considerada, que pode ainda deixar de ser uma curva plana.

Todavia, trataremos apenas da ordem das superficies circulares, por serem as mais empregadas. Devem ser definidas como formadas por um circulo de raio variavel ou não, que se move segundo uma lei qualquer.

Estas superficies podem ser de dois *generos* distinctos, conforme o circulo se move ou não parallelamente a si mesmo. Cada um destes generos comprehende evidentemente uma infinidade de familias distinctas. Porque no 1.° pode-se conceber que o plano do circulo gerador, sempre sujeito ao parallelismo, fica ou não perpendicular á recta descripta por seu centro; e no 2.° pode-se substituir successivamente este eixo rectilineo por uma curva qualquer, como por exemplo uma parabola, uma hyperbole, uma helice, etc.... Cada uma destas hypotheses produzirá uma familia distincta, sendo a mais simples e a mais conhecida a dos *corpos redondos* pertencente áquelle genero. As superficies desta familia são aquellas engendradas por um circulo de raio variavel, cujo centro percorre uma recta fixa, ficando o seu plano constantemente perpendicular a esta recta ou eixo. A lei de variação do raio determina então as diversas especies de superficies desta familia.

Si numa superficie assim produzida, considerar-se uma secção plana segundo o eixo, os raios correspondentes aos diversos pontos do mesmo eixo determinarão, em cada caso, uma curva caracteristica, que se chama secção meridiana ou simplesmente *meridiano*. De sorte que a superficie em questão póde ser considerada como produzida pelo movimento do meridiano em redor do eixo, cujos pontos extremos são por isto chamados *polos*. É assim, por exemplo, que a superficie espherica pode ser definida como sendo gerada pela revolução de um circulo em torno do eixo diametral; a superficie cylin-

drica como formada pela revolução de uma recta em torno de um eixo, ficando constantemente parallela a ella, etc... Esta propriedade geral é muito empregada nas artes geometricas para a construcção de taes superficies, e é della que deriva o nome que se lhes deu de *superficies de revolução*. Concebe-se, porém, que similhante propriedade deixaria de existir si o plano do circulo, posto que conservando uma direcção invariavel, se tornasse obliquo á recta fixa descripta por seu centro. A lei de variação do raio definiria ainda as diversas especies de superficies assim obtidas, mas estas pertenceriam então a uma outra familia de superficies circulares, que chamaremos *superficies mongianas*, em homenagem a Monge, que as estudou especialmente. A superficie do cylindro circular obliquo pertence evidentemente a esta familia.

2.º Passando agora a definir as superficies circulares do segundo genero, não é menos evidente que são em numero infinito, porque o raio do circulo pode variar infinitamente, bem como a curva descripta por seu centro, ficando ou não seu plano perpendicular a esta curva. Assim, quando um circulo de raio invariavel se move, conservando-se sempre perpendicular á curva qualquer descripta por seu centro, obtem-se a familia das superficies *tubulares ou canaes*, que comprehende evidentemente uma infinidade de especies distinctas. Para concebel-as, basta suppôr successivamente que o lugar é uma curva plana, cylindrica, conica ou espherica, etc... Todas essas especies de superficies pertencem a uma familia muito complexa. Veremos que só no caso mais simples podem ser apreciadas com precisão pela geometria transcendente, por meio da propriedade caracteristica de um *plano tangente* á superficie considerada. Porque todas as superficies que pertencem a uma mesma familia, gozam com effeito de uma mesma propriedade relativa a seus planos tangentes.

Si o plano do circulo não fôr perpendicular á curva descripta por seu centro, obtem-se sem duvida uma outra categoria de superficies não menos complexas nem menos variadas

que a precedente. Essa complexidade será ainda maior si suppusermos em ambos os casos que o raio do circulo se torna variavel.

Uma mesma especie de superficies pode pertencer simultaneamente a familias diversas. Assim é que vemos o cylindro e o cone rectos de base circular incluidos ao mesmo tempo entre as *superficies de revolução* e as *superficies desenvolviveis*; a hyperboloide de revolução de uma folha é ao mesmo tempo uma *superficie de revolução* e uma *superficie reversa*, etc... Similhante circunstancia resulta evidentemente da impossibilidade de realizar-se uma perfeita distribuição das *familias* de superficies em *generos* bem distinctos, do mesmo modo que não se pode reunir esses diversos *generos* em *ordens* mais numerosas para formar *classes* bem definidas, até constituir-se uma completa hierarchia.

Uma tal instituição só poderia surgir geometricamente, si as linhas por meio das quaes se comparam as superficies comportassem por sua vez uma classificação. Mas esta não é possivel ahi por falta de caracteres assás pronunciados e diversos para resumir o conjunto das similhanças e das differenças entre as linhas. O principio geral da taxonomia geometrica fica necessariamente restricto ás superficies, em virtude de sua maior complicação. Sendo as curvas engendradas por um ponto que não tem forma, é evidente que só podem differir pelo movimento delle; de sorte que se aproximam muito umas das outras, não permittindo assim caracteres assás pronunciados.

E' isto que reage sobre as superficies, impossibilitando a coordenação dos diversos generos de suas familias. Taes são os limites necessarios da taxonomia geometrica, que não pode portanto caracterizar a theoria geral da classificação, posto que constitua de facto a sua introducção didactica (10 e)

(10 e) Tal é tambem a origem normal de um contraste analogo áquelle que manifesta a classificação biologica, onde os principios geraes de taxonomia só são plenamente applicaveis aos animaes, em virtude da extrema simplicidade dos vegetaes. «Basta estender esta comparação aos diversos dominios encyclopedicos, sem a limitar ás differentes partes de cada um del-

123 — **Modos de geração do plano como caso particular das superficies precedentes.** Todos os modos de geração verdadeiramente usuaes podem convir ao *plano*, embora excepcionalmente; de sorte que fica elle classificado entre as differentes familias de superficies.

I. *O plano considerado como superficie cylindrica.* Como já dissemos, chama-se geralmente superficie cylindrica a toda aquella que é gerada por uma recta que se move continuamente, conservando-se sempre parallela a si mesma, e encontrando constantemente uma linha fixa qualquer. Esta linha é a directriz da superficie cylindrica, e a recta movel, que occupa as differentes posições parallelas entre si, se chama *geratriz*.

No caso particular em que a directriz fôr uma circunferencia de circulo, e além disso a geratriz fôr perpendicular ao plano deste, a superficie cylindrica será o que se chama um *cylindro circular recto;* o qual pode ainda ser classificado entre as superficies de revolução. Si suppusermos que a geratriz tem uma direcção qualquer, e que a directriz seja uma linha recta, teremos então, para o lugar geometrico das posições da geratriz, uma superficie plana. *O plano pode, pois, ser definido como uma superficie cylindrica cuja directriz é uma linha recta;* isto é, como gerado pelo movimento de uma recta que se move parallelamente a si mesma, apoiando-se constantemente sobre uma recta fixa.

II. *O plano considerado como superficie conica.* Já vimos que se dá a denominação collectiva de superficie conica a to-

---

jes, para sentir que a theoria das classificações deve pertencer não á base mas ao vertice da hierarchia scientifica. Muito melhor apreciaveis quando a comparação dos phenomenos faz sobresair mais as analogias e os contrastes, os principios taxonomicos só podem plenamente surgir para o espectaculo social e moral. Si bem que o dominio vital tivesse suscitado sua systematização, mediante o methodo comparativo, elle não fez mais do que esboçar noções elementares verdadeiramente destinadas á sciencia final. Um grande afastamento desta e uma insufficiente complicação dos phenomenos, já haviam tornado a chimica menos propria a caracterizar a theoria da classificação, embora a nomenclatura chimica necessitasse de sua applicação.

das aquellas que são geradas por uma recta G que se move passando sempre por um ponto fixo V e encontrando continuamente uma linha fixa D D′ (Fig. 85). A recta movel G é a geratriz da superficie conica, e a linha fixa D D′ é a sua directriz. O ponto V é o vertice do cone assim formado, e é claro que sendo a geratriz G uma recta indefinida em ambos os sentidos, este ponto dividirá a superficie em duas folhas symetricas.

No caso particular em que a directriz D D′ é uma circunferencia de circulo, obtem-se a especie geometrica que se chama *cone de base circular*. E si além disso, o vertice V se achar situado sobre a perpendicular ao plano dessa circunferencia, passando pelo seu centro obtem-se o *cone circular recto*, que, conforme veremos, pode tambem ser incluido entre as superficies de revolução.

Emfim, si o vertice V occupar uma posição qualquer, e a directriz D D′ fôr uma linha recta, a superficie conica produzida será o *plano*. Este *pode portanto ser considerado como uma superficie conica, cuja directriz é uma linha recta;* isto é, podemos definil-o como *o lugar das posições de uma recta que se move, passando sempre por um ponto fixo e encontrando constantemente uma recta fixa.*

III. *O plano considerado mais geralmente como uma superficie rectilinea ou regrada qualquer.* Uma comparação mais geral que as precedentes leva a incluir o plano no grupo mais vasto das superficies que são collectivamente denominadas *rectilineas*, por serem engendradas pelo movimento qualquer de uma linha recta. Para concebel-as, já vimos que basta imaginar o conjunto de posições de uma recta qualquer, que se move continuamente segundo uma lei determinada.

Para que a geração da superficie fique assás definida, é preciso sujeitar a geratriz a três condições de fixidez, e isto se consegue suppondo que a recta movel G G′ escorrega constantemente sobre três directrizes quaesquer $D D_1$, $D' D'_1$, $D'' D''_1$ (Fig. 86). Para verificar que a superficie fica então definida,

basta mostrar que poderemos construir tantas posições da geratriz movel quantas quisermos.

Com effeito, marquemos arbitrariamente sobre uma das directrizes $D D_1$ um ponto M (Fig. 87), e consideremos este ponto como vertice de dois cones, um tendo por directriz a curva $D' D'_1$ e o outro a curva $D'' D''_1$. Esses dois cones cortar-se-hão evidentemente segundo a recta M G, que passará pela curva directriz $D'' D''_1$, assim como pela outra $D' D'_1$. O mesmo podendo ser feito para qualquer outro ponto da directriz $D D_1$, concluimos que é possivel construir tantas posições da geratriz movel quantas quisermos; de sorte que a superficie considerada fica assim definida.

Em vez de obrigar a recta movel, a *geratriz*, a encontrar simultaneamente as três curvas directrizes, poder-se-ia tambem sujeital-a a encontrar apenas duas, e a ser parallela a um plano dado, pois que teriamos ainda as três condições, e o movimento ficaria determinado.

Si as três directrizes, em vez de serem linhas quaesquer, forem rectas que não se encontrem, sem que sejam parallelas, a superficie regrada assim obtida não será ainda o plano, porém sim a que se chama *hyperboloide de uma folha* (Fig. 88). Mas, si suppusermos que as três directrizes são linhas rectas que se encontram duas a duas, a superficie gerada será evidentemente um plano. Assim, pois, *pode-se conceber o plano como sendo uma superficie regrada cujas directrizes são linhas rectas concorrentes duas a duas*, isto é, como a superficie gerada por uma recta movel que se apoia sobre três rectas fixas.

E' evidente que neste caso particular se pode prescindir de uma das directrizes rectilineas que se torna superflua. Porque a condição a que se acha sujeita a geratriz, de encontrar as duas directrizes convergentes em um mesmo ponto, já é sufficiente para determinar as posições da linha movel. Dahi resulta que se pode definir mais simplesmente o plano como sendo a superficie formada por uma recta movel que se apoia

constantemente sobre duas rectas fixas convergentes para um mesmo ponto.

Já vimos que o plano pode tambem ser classificado entre as superficies cylindricas e conicas. Comquanto estas duas familias de superficies pertençam á classe das chamadas *rectilineas* ou *regradas*, ellas só ahi se acham entre as ordens das que se donominam *desenvolviveis*. Acabámos, porém, de mostrar que as superficies não desenvolviveis ou *reversas* comprehendem tambem o plano como caso particular.

IV. *O plano considerado como superficie circular*. Depois de haver indicado os diversos modos rectilineos de formação do plano, vamos completar sua apreciação aggregando-o ao grupo mais variado das *superficies circulares*. Sabemos que taes superficies podem ser definidas collectivamente como aquellas que resultam do movimento qualquer de um circulo cujo raio varia simultaneamente.

Nas superficies desta ordem se acham comprendidas as que são chamadas de *revolução*.

Já vimos que uma superficie de revolução pode ser definida pelo movimento de uma linha, ordinariamente plana, em torno de um eixo fixo. Cada ponto da geratriz descreve assim, em seu movimento, um circulo cujo centro fica sobre o eixo, e este circulo é o que se chama um *parallelo* da superficie.

Vê-se, pois, que uma superficie de revolução fica determinada por seu eixo, e por uma posição qualquer da linha meridiana.

Si esta fôr um circulo, ter-se-ha a *superficie espherica;* si fôr uma recta parallela ao eixo, ter-se-ha a *superficie cylindrica;* si fôr uma recta obliqua ao eixo, ter-se-ha a *superficie conica*. Emfim, no caso particular em que esta recta é perpendicular ao eixo, ter-se-ha evidentemente uma *superficie plana*.

O plano fica assim classificado na familia das superficies de revolução, quando o meridiano é uma recta perpendicular ao eixo (Fig. 89).

124 — O PLANO CONSIDERADO COMO O LUGAR DE TODOS OS PONTOS EQUIDISTANTES DE DOIS POLOS. Ao modo de geração precedente filia-se uma quinta maneira de definir o plano. Com effeito, imaginemos no espaço dois pontos fixos P e P′ (Fig. 89), e vejamos qual é o lugar geometrico constituido por todos os pontos que distam igualmente daquelles dois.

Para isto liguemos por uma recta os pontos P e P′ e ao meio A desta recta tiremos-lhe uma perpendicular A y. Qualquer ponto M desta perpendicular dará lugar a dois triangulos rectangulos M P A e M P′ A, necessariamente iguaes (por terem os dois cathetos iguaes), donde resulta que $MP = MP'$. Ora, si a recta A y girar em torno de P P′, que lhe é perpendicular, as distancias M P e M P′ não deixarão de ser iguaes em todas as posições que occuparem, e nestas condições o lugar de todos os pontos equidistantes dos dois polos dados P e P′ será exactamente a superficie descripta pela rotação de A y em torno de P P′, isto é, será o plano, conforme vimos no modo de geração precedente.

Si em vez de conceber os pontos P e P′ de um modo puramente abstracto, suppusermos que são dois focos luminosos de igual intensidade, poderemos então considerar o plano como sendo *uma superficie igualmente illuminada por duas luzes da mesma intensidade.*

Acabámos de mostrar que á geração do plano como superficie de revolução se liga naturalmente um outro modo, consistindo em consideral-o como o lugar de todos os pontos equidistantes de dois polos determinados. Dest'arte ficou provado indirectamente que a superficie constituida pelo conjunto de taes pontos é sempre um plano. Mas, pode-se directamente verificar a natureza da superficie que goza desta propriedade. Para isto basta mostrar que, reciprocamente, *o lugar dos pontos equidistantes de dois polos dados é uma superficie que permitte, em todos os sentidos, a inteira applicação de uma linha recta;* porque este caracter fundamental do plano não deixará nenhuma duvida sobre a natureza da superficie considerada.

Com effeito, sendo ainda P e P' os dois polos, e A y uma perpendicular ao meio da recta que os une, conclue-se que um ponto qualquer M desta perpendicular se acha a distancias iguaes dos dois polos dados (Fig. 89), isto é, $MP = MP'$ como obliquas que se desviam igualmente do pé da perpendicular A M. Imaginemos fora da recta A y um outro ponto M', satisfazendo ainda á condição de se achar a igual distancia dos mesmos polos, de sorte que se tenha $M'P = M'P'$, e o liguemos ao primeiro ponto M. Vamos mostrar que um terceiro ponto qualquer N, escolhido sobre a recta M M', satisfará ainda á condição de equidistancia dos polos dados. Os triangulos P M M' e P' M M' têm os três lados respectivamente iguaes, donde concluimos que o angulo M' M P é igual ao angulo M' M P'.

Mas então, ligando N aos dois polos, nota-se que os triangulos P N M e P' N M têm dois lados iguaes comprehendendo angulos iguaes, donde concluimos finalmente que P N será igual a P' N, o que quer dizer que o ponto N será ainda equidistante dos dois polos dados.

E como o ponto N pode ser qualquer, fica directamente verificado que todos os pontos equidistantes dos dois polos dados satisfazem á condição de existirem sobre rectas traçadas em diversas direcções do lugar geometrico considerado. Este admitte, portanto, a adaptação de rectas em qualquer sentido, donde resulta que é um plano, em virtude do caracter fundamental desta superficie.

«Taes são, entre as cinco gerações do plano, as duas unicas definições equivalentes que exigem uma verdadeira demonstração, para se tornarem plenamente apreciaveis.»

Considerando esta superficie como o lugar de todos os pontos equidistantes de dois polos, vê-se emfim que estes polos podem ser tomados de modo arbitrario sobre o eixo, contanto que sejam mutuamente symetricos. Assim tambem se pode adoptar para eixo uma outra recta qualquer, desde que seja parallela a P P', visto como terá ella as mesmas perpendiculares que formam o plano considerado.

Seja qual fôr o eixo escolhido, dois quaesquer de seus pontos podem ser tomados para *polos*, desde que fiquem symetricos. Em geral, dois pontos quaesquer são ditos symetricos em relação a um plano, quando estão situados na mesma perpendicular a este plano, e a igual distancia delle; do mesmo modo que dois pontos são ditos symetricos a um eixo, quando ficam collocados na mesma perpendicular a este eixo, e á mesma distancia delle.

O plano contendo, como vimos, todas as perpendiculares a um mesmo ponto do eixo, torna-se assim o lugar geometrico de uma serie de pontos symetricos a esta recta. A intersecção de cada perpendicular com o mesmo eixo fica, pois, a igual distancia dos extremos della; e, por isto, este ponto se denomina *centro de symetria*.

125 — NATUREZA EXCEPCIONAL DO PLANO; PROPRIEDADES RESULTANTES DOS CINCO MODOS DE GERAÇÃO DESTA SUPERFICIE. — Embora o plano possa ser incluido entre as superficies que acima mencionamos, elle offerece em cada um destes casos um caracter excepcional, que o permitte distinguir das outras especies de taes superficies. E' o que passamos a mostrar, retomando successivamente as gerações cylindrica, conica, etc..., desta superficie.

1.° Na geração do plano considerado como *superficie cylindrica*, observa-se um facto importante que não se verifica nas outras especies de superficies desta familia. Dada uma superficie cylindrica cuja directriz seja curvilinea, só ha uma direcção possivel para a sua geratriz. Quando, porém, a superficie cylindrica considerada é o plano, uma recta qualquer traçada sobre ella pode então ser tomada para geratriz; de modo que esta, que no caso geral só pode ter uma direcção unica, fica até certo ponto indeterminada no caso especial do plano. Isto se exprime dizendo que o plano é a unica superficie que pode ser cylindrica em uma infinidade de direcções da geratriz.

Da possibilidade de dar ao plano uma infinidade de gera-

trizes rectilineas, todas differentes, resulta immediatamente o caracter fundamental desta superficie, isto é, *o de comportar ella a inteira applicação de uma linha recta em todos os sentidos.* E como duas posições quaesquer da geratriz em relação á directriz bastam evidentemente para determinar a superficie, vê-se tambem que *a posição de um plano fica determinada por duas rectas fixas e parallelas; porque cortando-as por outra recta, em qualquer direcção, obtem-se a directriz rectilinea de uma superficie cylindrica que não é senão o plano.* Similhantemente poder-se-ia deduzir outras propriedades usuaes, como, por exemplo, a *de poder um plano escorregar sobre outro de uma infinidade de maneiras, sem ambos cessarem de coincidir etc...*

2.º Na geração conica do plano, obter-se-ia uma indeterminação analoga á que indicámos precedentemente para o caso da superficie cylindrica. Porque quando nos é dada uma superficie conica da directriz curvilinea, o seu vertice é sempre determinado e unico. Tratando-se, porém, de uma superficie plana, a posição do vertice é então indeterminada, pois um ponto qualquer pode ser escolhido para represental-o.

Da geração conica do plano resultam tambem algumas de suas propriedades usuaes. Assim, deduz-se immediatamente que *por três pontos dados é* smpre possivel fazer passar um plano, porque se pode tomar qualquer um destes pontos para vertice do cone cuja directriz seja a recta que liga os dois outros pontos, e deste modo a superficie obtida será sempre um plano. Si as distancias entre os três pontos forem determinadas, é então evidente que por elles só se poderá fazer passar um plano.

Do mesmo modo se conclue que *uma recta qualquer e um ponto fora della determinam a posição de um plano,* porque se pode olhar a recta como a directriz da superficie conica cuja geratriz seja outra recta qualquer, que passe pelo ponto e encontre a primeira. Similhantemente, *duas rectas que se cortam determinam a posição de um plano;* visto como sua

intersecção pode ser considerada como o vertice da superficie cónica, cuja directriz é a recta que liga as duas outras extremidades.

3.º De um modo mais geral, pode-se conceber as duas rectas que se encontram como sendo as duas directrizes de uma superficie regrada, cuja geratriz é a recta que passa pelas outras extremidades. No caso de se considerar três pontos não em linha recta, obter-se-ha as duas directrizes rectilineas da superficie regrada, ligando um qualquer destes pontos aos dois restantes; o que constitue ainda uma excepção que distingue geralmente o plano das outras especies de superficies rectilineas.

De tudo que precede resulta, pois, que são precisos pelo menos três pontos para determinar a posição de um plano. Estes três pontos não devem estar situados em linha recta, e podem evidentemente ser substituidos quer por duas rectas que se encontrem num delles, quer por este e pela recta que una os dois outros, ou por esta recta e por uma outra parallela que passe pelo primeiro ponto.

4.º Considerado como superficie circular, pertencente á familia dos corpos de revolução, o plano offerece ainda um caracter excepcional em relação ás outras especies dessas superficies.

Porque o meridiano sendo então uma recta perpendicular ao eixo, pode em sua rotação, occupar evidentemente uma infinidade de situações, de accôrdo com a uniformidade que por toda a parte caracteriza o plano.

Dahi resulta immediatamente que *por um ponto qualquer de uma recta, situada fora de um plano, se pode suppôr uma infinidade de perpendiculares á mesma recta*. E esta propriedade distingue evidentemente todas as rectas que ficam fora de um plano, das que se acham traçadas nelle, porquanto vimos que neste caso só se pode admittir uma unica perpendicular num ponto qualquer da recta considerada.

5.º Considerada como o lugar de todos os pontos equidis-

tantes de dois polos dados, a geração do plano equivale, como vimos, á precedente, e offerece portanto o mesmo caracter excepcional.

Ella reproduz, sob uma nova forma, a indeterminação que sempre caracteriza o plano. Porque se pode tomar para polos dois pontos quaesquer do eixo, contanto que elles sejam mutuamente symetricos; assim como se pode tomar para eixo qualquer das perpendiculares num mesmo ponto de uma recta dada. Com effeito, suppondo que esta perpendicular executa uma rotação em torno deste ponto, ella reproduzirá evidentemente a superficie plana. Assim, pois, *si duas ou mais rectas forem perpendiculares a uma mesma linha, e por um mesmo ponto desta, ellas se acharão todas num mesmo plano perpendicular á ultima, e reciprocamente.*

Acabámos de mostrar que as propriedades essenciaes do plano podem ser deduzidas da serie de gerações proprias a tal superficie. Todavia, para completar a theoria do plano, precisamos apreciar as condições de parallelismo e perpendicularismo das rectas em relação a estas superficies.

126 — Guiados pelo que foi exposto no capitulo precedente, podemos sempre reduzir a comparação de dois planos á de linhas rectas, caracterizando seu parallelismo pelo de linhas traçadas respectivamente num e no outro, e seu perpendicularismo pelo de rectas tiradas de um para o outro. Consideremos em primeiro lugar as condições de parallelismo.

I. Para mostrar que o parallelismo de dois planos é sempre reductivel ao de linhas rectas, notemos a principio que *as intersecções de dois planos parallelos* M *e* N *por um terceiro plano* P *são duas rectas parallelas.* Essas intersecções não podem, com effeito, encontrar-se, por estarem inteiramente nos planos M e N, que não se encontram por serem parallelos; e como ellas se acham tambem no mesmo plano secante P, segue-se que são parallelas.

Qualquer que seja a direcção do plano secante em relação aos dois planos parallelos, suas intersecções serão sempre li-

nhas parallelas. Tomando partes iguaes numa e noutra, e ligando por linhas rectas suas extremidades, formar-se-ha evidentemente um parallelogrammo. Portanto, se pode concluir que *as partes de rectas parallelas comprehendidas entre planos parallelos são necessariamente iguaes.*

Si, ao contrario do que fizemos, tomarmos agora sobre as intersecções dos dois planos comprimentos desiguaes, ligando respectivamente por linhas rectas os pontos assim determinados, e prolongando as rectas concorrentes até o encontro de um terceiro plano tambem parallelo, as partes das duas rectas AB e CD, comprehendidas entre os três planos parallelos L, M, N (Fig. 90), serão directamente proporcionaes. Isto é, sendo A, E e B os encontros dos três planos com a primeira recta, e C, F e D com a segunda, teremos a proporção.

$$AE : EB :: CF : FD$$

Com effeito, traçando a recta AC, que sabemos ser parallela a EF e BD, e attendendo que AB e CD se acham no mesmo plano secante, obteremos immediatamente a proporção acima, em virtude do que foi dito no numero (105).

Si as rectas AB e CD não se acharem no mesmo plano (Fig. 91), basta tirar a recta AG parallela a CD, e fazer passar um plano por AB e AG, assim como outro por AG e CD, para reduzir a questão ao caso precedente. Porque o primeiro plano cortará os dois M e N nas linhas parallelas EH e BG; e o segundo plano cortará os planos L e M segundo as rectas AC e HF, tambem parallelas. Logo, por ser $AH = CF$ e $HG = FD$, em vista da proposição citada, teremos as proposições

$$AE : EB :: AH : HG,$$
$$AH : HG :: CF : FD;$$

e por conseguinte

$$AE : EB :: CF : FD.$$

Resulta immediatamente do que precede *que dois planos parallelos* M N, *cortam sempre em partes proporcionaes um systema de rectas concorrentes em um mesmo ponto.* E, reciprocamente, *si dividirmos em partes proporcionaes diversas rectas que partem de um mesmo ponto e terminam no mesmo plano, os pontos de divisão se acharão todos num outro plano parallelo a este* (Fig. 91).

II. Dissemos que as intersecções de dois planos parallelos M e N por um terceiro P são duas rectas parallelas. Notemos demais que si os dois planos M e N se encontrarem, a sua intersecção commum será ainda parallela ás duas intersecções com o plano secante e, por conseguinte, a todas as parallelas a essas intersecções em qualquer dos planos M, N e P, desde que o plano secante esteja na mesma direcção que a intersecção dos dois outros. Mais geralmente, *si duas rectas* A B e C D (Fig. 92) *são parallelas, e si por ellas fizermos passar respectivamente dois planos* M *e* N *que se cortem, sua commum intersecção* E F *será parallela ás mesmas rectas.*

Com effeito, notemos, em primeiro lugar, que por um ponto qualquer E, fóra do plano A B C D (determinado pelas linhas A B e C D), não se poderia traçar mais de uma parallela a estas duas rectas; porque uma parallela a A B e C D achando-se ao mesmo tempo nos planos A B E e C D F, deverá necessariamente coincidir com a sua intersecção E F. Logo E F é esta parallela.

Em segundo lugar, torna-se evidente que qualquer recta parallela a A B ou a C D será tambem parallela a E F, porque vimos que duas rectas parallelas a uma terceira, situada no mesmo plano, são parallelas entre si. No caso das parallelas a A B e C D se acharem no plano A B C D, o seu parallelismo com E F não é menos evidente: assim é que si A′B′ fôr parallela a A B e a C D, será tambem parallela a E F.

Notemos, emfim, que cada uma das duas rectas A B e C D será parallela a qualquer plano que passar pela outra; isto é, não pode encontrar esse plano, porque estas rectas se achando

inteiramente no plano A B C D, segue-se que A B, por exemplo, não poderá encontrar um plano conduzido segundo C D, sem que encontre a intersecção deste plano com A B C D, isto é C D, o que vimos não ser possivel. Assim pois, *toda recta parallela a outra recta traçada num plano é parallela a este plano.*

Dahi se infere que *por um ponto dado fora de um plano se pode traçar uma infinidade de rectas parallelas a este plano;* porque é possivel conceber nelle outras tantas rectas nas mesmas direcções daquellas, o que aliás se acha de accôrdo com o que dissemos a respeito da geração cylindrica desta superficie. Vê-se tambem que *todas as parallelas que puderem ser tiradas a um plano dado ficam situadas sobre um outro plano parallelo áquelle;* de sorte que *o lugar de todas as parallelas tiradas por um ponto dado a um mesmo plano é um segundo plano parallelo a este.*

E como duas parallelas bastam por si sós para determinar este segundo plano, concluimos que *duas linhas rectas traçadas fóra de um plano e parallelamente a duas outras tiradas neste plano determinam um outro plano parallelo ao primeiro.* Este plano é o unico que se pode tirar num ponto dado fora da superficie proposta, porque acabámos de ver que elle é o lugar geometrico de todas as parallelas que passam pelo mesmo ponto, em qualquer direcção.

III. Vejamos agora um novo processo que é empregado ordinariamente para obter um plano parallelo a outro.

Si pelo ponto dado forem tiradas duas rectas parallelas respectivamente a duas outras traçadas por um ponto qualquer no plano considerado, obtem-se um outro plano parallelo a este. Com effeito, notemos a principio que o novo plano fica determinado, porque as duas rectas que se encontram determinam, como sabemos, a sua posição. Demais, os dois angulos de lados parallelos ficam necessariamente em planos parallelos. Sejam B A C e B' A' C' estes angulos, ficando o segundo sobre o plano dado (Fig. 93). As rectas A B e A'B', A C e

$A'C'$, parallelas por construcção, ficam consequentemente equidistantes: logo tambem o são os dois planos determinados por AB com AC, e por $A'B'$ com $A'C'$; tornando-se por conseguinte parallelos.

Notemos, de passagem, que *os dois angulos* BAC e $B'A'C'$, *não situados no mesmo plano tendo os lados respectivamente parallelos, e aberturas voltadas para o mesmo lado, são iguaes.* Com effeito, tomando sobre os lados do primeiro os comprimentos AD e AE, respectivamente iguaes a $A'D'$ e $A'E'$ sobre os do segundo, e traçando as rectas AA', DD' e EE', obtem-se os parallelogrammos $AA'D'D$ e $AA'E'E$: logo DD' e EE' são iguaes e parallelas, por ser cada uma dellas igual e parallela a AA'.

Traçando, pois, DE e $D'E'$, a figura $DD'E'E$ é tambem um parallelogrammo, e conseguintemente $DE = D'E'$. Assim, os dois triangulos ADE e $A'D'E'$ são iguaes por terem os três lados iguaes, do que se conclue ser $\wedge DAE = \wedge D'A'E'$, ou $\wedge BAC = \wedge B'A'C'$. Si em lugar do angulo BAC, considerarmos o seu igual e opposto GAL e o seu supplemento BAG ou CAL, em relação ao angulo $B'A'C'$, verificariamos immediatamente que *os dois angulos de lados parallelos com aberturas não voltadas para a mesma parte, são iguaes ou supplementares, conforme todos os lados são dirigidos em sentidos contrarios, ou sómente dois.*

Vê-se, por conseguinte, que *por duas rectas não situadas no mesmo plano é sempre possivel fazer passar dois planos parallelos; e que si duas rectas existem em planos differentes, se pode sempre suppôr um terceiro plano parallelo aos dois primeiros e, por conseguinte, ás duas rectas consideradas.*

Na construcção de dois planos parallelos exige-se quasi sempre que fiquem elles a uma distancia determinada um do outro. Similhante condição resulta immediatamente das propriedades de que gozam as linhas rectas perpendiculares e obliquas em relação aos planos, e que passamos a apreciar.

130 — Estudadas, como se acham, as propropriedades das

rectas perpendiculares situadas num plano, torna-se facil determinar as condições de perpendicularismo entre as superficies dessa especie.

I. Notemos a principio que *toda a recta* S A, *perpendicular a duas linhas quaesquer* B A C *e* D A E, *tiradas por seu traço* A *no plano* M N, *o é tambem a qualquer outra recta, tal como* F A G, *que passar pelo ponto* A *no mesmo plano e, por conseguinte, o será outrosim a este plano* (Fig. 94).

Com effeito, de um e outro lado do ponto A tomemos A B = A C, e A D = A E; tracemos as linhas B D e C E, e liguemos o ponto S aos pontos B, C, D, E, F e G. Os dois triangulos B A D e C A E serão iguaes por terem A B = A C, A D = A E, e iguaes os angulos comprehendidos por estes lados; dahi resulta que B D = C E. Por uma construcção analoga, verifica-se que A G = A F, bem como B G = C F, e D G = E F. Assim pois, os triangulos S A B e S A C serão tambem iguaes, por terem um lado commum S A, e A B = = A C, por construcção, bem como iguaes os angulos S A B e S A C, por hypothese; dahi resulta que S B = S C. A mesma igualdade verifica-se entre os triangulos S A D e S A E, donde se segue que S D = S E.

Comparando, emfim, os triangulos S B D e S C E, ver-se-ha que os lados homologos de um são iguaes aos do outro; isto é, B D = C E, S B = S C, S D = S E, e demais B G = = C F, D G = E F. Segue-se daqui que as linhas S G e S F são iguaes entre si. Assim, pois, a recta S A, tendo dois de seus pontos A e S a iguaes distancias dos dois pontos G e F, será perpendicular á recta G A F.

E como dar-se-ha o mesmo em relação a qualquer outra linha, tirada por A no plano M N, concluimos que a recta S A, que fôr perpendicular a duas linhas tiradas por seu pé no plano M N, sel-o-ha tambem a todas as outras que passarem por este ponto e, por conseguinte, ao proprio plano, que é, como vimos, o lugar geometrico de todas essas perpendiculares (n.º 125 — 5.º).

Desta propriedade deduz-se immediatamente, como na theoria da linha recta: 1.° *A perpendicular S A é menos longa que qualquer obliqua tirada do ponto* S *para um ponto qualquer do plano* M N, *e mede, por conseguinte, a mais curta distancia do ponto considerado ao plano* M N; 2.° *Num ponto dado sobre um plano, não se pode levantar mais de uma perpendicular a este plano, e de um ponto fora delle não se pode baixar senão uma perpendicular sobre o plano;* 3.° *De duas obliquas tiradas do ponto* S *e desigualmente afastadas do pé da perpendicular baixada daquelle ponto sobre um plano* M N, *a que mais se afasta é mais longa, e reciprocamente;* 4.° *Duas linhas perpendiculares ao mesmo plano são parallelas entre si;* 5.° *Reciprocamente, si uma linha é perpendicular a um plano qualquer, outra que lhe for parallela será perpendicular ao mesmo plano.*

Advertencia. A condição de ser S A perpendicular ás duas rectas no plano M N é sempre indispensavel para o seu perpendicularismo com o plano; porque uma recta pode não ser perpendicular a um plano, sendo-o entretanto a uma só recta traçada nelle.

Assim é que, suppondo S A perpendicular ao plano M N, e E F uma linha traçada neste plano, si de A tirarmos A B perpendicular a E F, a linha S B, obliqua ao plano M N, será entretanto perpendicular a E F (Fig. 95), e dahi o nome de *theorema das 3 perpendiculares*, dado a esta proposição.

Com effeito, tiremos A C parallela a B F e, por conseguinte, perpendicular a A B, achando-se como ella no plano M N. Esta linha sendo perpendicular ao mesmo tempo a A B e a A S, será portanto perpendicular ao plano S A B, em virtude do que acabámos de demonstrar. Assim pois, a recta E B F, parallela a A C, devendo ser perpendicular ao mesmo plano, S A B, o será a todas as linhas tiradas por seu traço nesse plano e, por conseguinte, tambem a recta S B.

Consequencia: Resulta do theorema ante-precedente que

para verificar si uma recta e um plano são perpendiculares entre si, basta ver si ella é perpendicular a duas rectas tiradas por seu pé e traçadas nesse plano.

II. *Problemas.* — O mesmo theorema e o precedente permittem tirar por um ponto qualquer uma perpendicular a um plano dado, bem como a uma recta traçada neste plano.

I. Tratando-se da perpendicular a um plano, dois casos podem ser considerados, conforme o ponto dado estiver situado no plano M N ou fora delle.

a) Seja O um ponto dado sobre o plano M N (Fig. 96); tire-se uma recta qualquer B C neste plano, e do ponto O trace-se nelle a perpendicular O D a esta recta; por seu pé D levante-se uma perpendicular qualquer D A á recta B C. Elevando emfim pelo ponto O, e no plano O D A, uma perpendicular O S a O D, esta recta O S será perpendicular ao plano M N.

O ponto O, pé da perpendicular O S, é o que se chama *projecção orthogonal* do ponto S sobre o plano M N. O lugar geometrico de todas as perpendiculares baixadas dos differentes pontos de uma linha sobre um plano denomina-se a *projecção* desta linha sobre o plano, que se chama por isto plano de projecção. Segue-se desta definição que *projecção de uma linha recta sobre um plano é tambem uma linha recta;* e como dois pontos bastam para determinar uma linha recta, é evidente que para ter a projecção de uma recta sobre um plano, bastará unir as projecções de seus pontos extremos. Por isso que o lugar das perpendiculares baixadas dos differentes pontos da recta sobre o plano é ainda um plano, pode-se tambem determinar a projecção orthogonal da recta ligando o seu encontro ou *traço* sobre o plano dado com a projecção de outro ponto qualquer della.

Si o plano dado fôr *horizontal*, a perpendicular O S chama-se *vertical*, e a sua direcção pode ser determinada praticamente deixando cair um *fio a prumo* do ponto S sobre

este plano, o que marcará o pé ou *traço* da perpendicular pedida sobre elle (10 f).

b) Seja S o ponto dado fora do plano MN (Fig. 96), donde se quer baixar uma perpendicular a este.

Baixemos a perpendicular SD sobre uma recta qualquer BC tirada no plano MN, e depois por seu pé, D, tiremos no plano MN a perpendicular DP sobre BC: a perpendicular SO baixada de S sobre OD, e no plano SDP, será perpendicular ao plano MN. E' evidente que por um mesmo ponto S não se pode baixar mais de uma perpendicular ao plano MN; porque si fôsse possivel tirar duas, ellas determinariam um plano cujo traço sobre MN seria uma recta perperdicular commum a ellas, o que é absurdo.

Pode-se tambem obter a perpendicular SO tirando pelo ponto O uma parallela a uma perpendicular AD, baixada sobre o plano MN. Com effeito, si duas rectas SO e AD são parallelas, e si uma dellas AD é perpendicular ao plano MN, a ontra SO o será tambem. Porque, si assim não fôsse poder-se-ia tirar por um dos pontos de AD uma perpendicular ao plano MN, a qual seria parallela a SO, e ter-se-ia então por um mesmo ponto duas parallelas a uma mesma recta SO, o que é absurdo.

II. Consideremos agora o outro problema, isto é, *de um ponto dado* S *baixar uma perpendicular sobre uma recta* EF, *situada num plano* MN (Fig. 95).

(10 f) A denominação de *vertical* de um lugar é dada em astronomia á recta que partindo do ponto considerado deve encontrar o centro da Terra. Um plano perpendicular á vertical de um lugar é chamado *horizontal;* de sorte que um plano será horizontal quando fôr conduzido segundo duas perpendiculares á vertical, ou em outros termos, segundo duas rectas horizontaes. O modo mais simples de dar, na pratica, essa direcção a um plano, consiste em empregar o *nivel de pedreiro*. Este instrumento é composto de três reguas BC, BA e AC que formam entre si um triangulo rectangulo isosceles ABC (Fig. 97), de cujo vertice cae um *fio a prumo* BP. Por conseguinte, collocando o nivel sobre um plano horizontal, caso em que a direcção do fio a prumo é perpendicular a AC, a extremidade livre deste fio deverá tocar exactamente a *linha de fé,* traçada segundo a direcção da perpendicular baixada do ponto B sobre AC, e passando assim pelo meio da regua AC. E reciprocamente, si o fio a prumo tomar esta direcção, elle será perpendicular a AC, de sorte que esta recta ficará horizontal. Portanto, si collocando o nivel em duas posições, que para mais exactidão se tomam rectangulares, achar-se que esta condição é satisfeita, pode-se concluir que o plano de que se trata é horizontal.

Para isto baixe-se do ponto S uma perpendicular S A sobre o plano M N; depois, do ponto A neste plano, tire-se uma perpendicular A B á recta E F; juntando o pé B desta perpendicular com o ponto S ter-se-ha em S B a perpendicular buscada á recta E F.

Estudadas como se acham as propriedades geraes do plano, podemos agora apreciar as que resultam das combinações de dois ou mais planos entre si: E' o que faremos no § seguinte.

§ 11.º

Combinações de dois ou mais planos entre si: Angulos diedros, triedros e polyedros. Corpos polyedricos regulares

131 — Ligação deste § com o anterior. Combinação de dois planos. A serie de gerações que foi apreciada no § precedente faz conhecer assaz as propriedades essenciaes do plano, assignalando as principaes relações existentes entre esta superficie e a linha recta. Ella não precisou de ser completada senão quanto ao *parallelismo* e á *perpendicularidade* dos planos entre si. Mas, as noções secundarias que se referem a esses accidentes geometricos podem ser facilmente grupadas em torno do proprio exame das combinações elementares entre os planos, evitando erigir-se em considerações distinctas os diversos incidentes de uma mesma apreciação.

Similhante estudo é indispensavel, conforme vimos, para que se torne possivel a medida dos comprimentos rectilineos no caso mais geral. E segundo o espirito das soluções mathematicas, se deve reduzir a comparação entre planos ás comparações entre rectas. O confronto dos planos entre si permitte assim novas comparações entre a linha recta e o plano, das quaes podem resultar, como consequencia, as noções complementares sobre o parallelismo e a perpendicularidade. Similhantes noções estabelecem deste modo a ligação especial entre o assumpto deste § e o do precedente.

Inclinação de dois planos: angulos diedros. Quando dois

planos se encontram, a sua inclinação mutua denomina-se *angulo diedro:* a intersecção dos dois planos constitue a *aresta* do angulo diedro, e os dois planos são as suas *faces*. Dois planos que se cortam formam, pois, quatro angulos diedros aos quaes se estendem as denominações usadas para os angulos resultantes da intersecção de duas linhas rectas. Os angulos diedros que têm então uma face commum chamam-se *adjacentes* (Fig. 98); e os que têm por faces os prolongamentos das faces do outro denominam-se *oppostos pela aresta* (Fig. 99).

Em vista disto, si os angulos adjacentes são iguaes, taes como E A B D e D′ A B D (Fig. 98), cada um se chama recto, e os planos se dizem *perpendiculares*. No caso contrario, o maior D′ A B D″ chama-se *obtuso*, e o menor E A B D″ *agudo;* os planos são então *obliquos*. E' evidente que os angulos *diedros adjacentes* valem em somma dois rectos, isto é, são *supplementares*. E' tambem evidente que os *diedros* oppostos pela aresta taes como D A B E e E′ A B C′ serão iguaes (Fig. 99): a observação directa o mostra e a deducção o constata, por terem o mesmo supplemento E A B D′.

Ora, quando um plano que encontra outro obliquamente gira em torno da intersecção commum, de modo que o angulo agudo vá crescendo, verifica-se que ha uma posição e *só uma* (Fig. 98) em que os angulos adjacentes são iguaes. Portanto, *por uma recta de um plano só pode passar um outro que lhe seja perpendicular*.

Relações mutuas que resultam para as rectas e os planos. A comparação dos planos deve reduzir-se á comparação de linhas rectas, conforme notamos acima. Examinemos, pois, as relações mutuas que resultam das rectas e planos no caso do angulo diedro. Comecemos pelas observações a que dá lugar a hypothese de uma inclinação qualquer dos planos comparados; ella conduzirá naturalmente a examinar as posições excepcionaes, quer parallelas, quer perpendiculares.

Reconhece-se em primeiro lugar que, *em qualquer diedro, as rectas traçadas em uma das faces só podem encontrar a*

outra face na aresta, que é o unico lugar commum aos dois planos. Portanto, *todas as parallelas á aresta de um diedro serão parallelas á face que lhes fôr exterior*. E isto é tambem verdadeiro em relação a qualquer recta do Espaço, parallela á aresta; porque, existindo então em um plano com esta, só poderia encontrar uma das faces na intersecção de tal plano com este ultimo, isto é, na propria aresta, o que é absurdo em vista da hypothese. Vê-se assim que *para constatar o parallelismo de uma recta em relação a um plano, basta verificar esse parallelismo para com uma recta do plano*. A mesma observação mostra que *para tirar por um ponto do espaço uma recta parallela a um plano, basta imaginar por esse ponto um outro plano que corte o primeiro, e traçar nelle pelo ponto dado uma parallela á intersecção dos dois planos*. Reconhece-se assim que por um ponto do Espaço podem passar rectas em numero infinito parallelas a um plano qualquer. Isto forma um contraste com a perpendicularidade, pois já vimos que por cada ponto só pode passar *uma* perpendicular a um plano.

Cada uma das rectas irradiadas de um ponto, parallelamente a um plano, terá a sua correspondente no pé da perpendicular que, no referido ponto, serve de eixo ao plano. Descobre-se assim que todas essas parallelas formam um plano perpendicular no mesmo ponto ao eixo de que se trata e, além disso, que esse plano não encontrará o primeiro, isto é, lhe será *parallelo*. Mas, a perpendicularidade do segundo plano em relação ao eixo do primeiro se constata por meio da perpendicularidade de duas rectas em um ponto do mesmo eixo. Portanto, *o parallelismo de um plano em relação a outro se verifica ou se constroe, mediante o parallelismo de duas rectas convergentes de um em relação ás do outro*. Vê-se tambem, por ahi, que *dois planos parallelos têm as suas perpendiculares communs;* porque baixando de qualquer ponto do primeiro plano uma perpendicular sobre o segundo, todos os planos que passarem por essa perpendicular determinam no primeiro plano

rectas perpendiculares á ella, como parallelas ás intersecções de cada um desses planos com o segundo.

Esta mesma construcção patenteia que *por cada ponto do Espaço só pode passar um plano parallelo a outro.* Mas, essa singularidade do parallelismo pode ser tambem reconhecida, imaginando que uma das faces do angulo diedro gira em torno de uma das parallelas á aresta. A inclinação mutua dos dois planos irá diminuindo, até que a face movel atinja uma posição em que deixe de encontrar a face invariavel. Os dois planos se tornarão então parallelos; e, si o movimento continuasse, a face movel iria cortar a fixa do lado opposto.

Tambem a consideração do angulo diedro permitte reconhecer directamente que o parallelismo de dois planos resulta do de duas rectas concorrentes de um em relação ás do outro. Porque quando dois planos se encontram, só são parallelas a cada um as rectas do outro que forem parallelas á intersecção, e portanto parallelas entre si. Logo, si duas rectas concorrentes forem parallelas a um plano, o plano dellas não pode encontrar o primeiro. Porque, si os dois planos se encontrassem, só uma das rectas é que poderia ser parallela ao primeiro, pois seria então parallela á aresta do diedro formado. A segunda recta, encontrando a outra, havia de encontrar a aresta, e portanto o primeiro plano, e não lhe seria então parallela como se suppunha.

Considerando agora as rectas que encontram a aresta, já sabemos que, em cada face e em cada ponto da aresta, só existe uma recta que seja perpendicular a esta. Similhante recta é em geral obliqua ás outras que passam por seu pé, no segundo plano. Ella não pode mais ser perpendicular a qualquer outra deste segundo plano, além da aresta, sem que seja perpendicular a esse plano.

Examinemos qual será neste caso a inclinação mutua dos dois planos, dos quaes um passe assim por uma recta perpendicular ao outro. Em primeiro lugar, notemos que neste caso, o plano que passa pela perpendicular a outro é normal á recta

traçada neste, perpendicularmente á aresta. Porque esta ultima perpendicular o seria a duas de tal plano, a saber, á aresta e á sua perpendicular nelle traçada. Isto posto, é claro que qualquer das faces do diedro pode então ser considerada como produzida pela revolução da aresta em torno da perpendicular traçada na outra face por um ponto da mesma aresta. Esta observação mostra que *os diedros adjacentes são iguaes*; por serem gerados por angulos rectilineos adjacentes iguaes, e, portanto, que os planos de suas faces são perpendiculares entre si.

Todavia, similhante igualdade dos angulos diedros, cujas faces são perpendiculares a uma recta traçada na outra normalmente á aresta, pode ser verificada pela superposição. Porque superpondo as duas faces respectivas dos dois diedros em taes condições, de modo que as arestas coincidam, bem como os pés das normaes OP e O′P′ ás arestas (Fig. 98), é claro que essas normaes se confundirão, e que as segundas faces coincidirão tambem, por se tornarem planos perpendiculares a uma recta no mesmo ponto.

Mas, como por uma perpendicular a um plano podem passar planos em numero infinito, reconhece-se deste modo que *por um ponto podem passar planos perpendiculares a outro em numero infinito*. Assim o contraste que haviamos constatado entre o parallelismo e a perpendicularidade das rectas em relação aos planos manifesta-se agora inversamente quanto aos planos entre si.

Por um ponto ha só um plano parallelo a outro; mas *ha rectas parallelas em numero infinito e que formam justamente o plano parallelo. Por um ponto ha só uma recta perpendicular a um plano;* mas *ha planos em numero infinito que lhe são perpendiculares, e a intersecção desses planos é a recta normal ao plano.*

Agora é facil de vêr que *toda recta perpendicular a uma das faces de um angulo diedro recto, e que passa pela aresta, existe inteiramente na outra face*. Porque, si assim não fosse,

o plano determinado pela supposta perpendicular e a aresta, sendo normal á primeira face, ter-se-ia pela aresta dois planos perpendiculares á segunda face.

Isto mostra tambem que *a recta traçada em uma face do angulo diedro recto, perpendicularmente á aresta, será perpendicular á outra face.* Porque, si tal não se desse, imaginando pelo pé dessa perpendicular o eixo correspondente á segunda face, teriamos na primeira face, e pelo mesmo ponto da aresta, duas perpendiculares a esta. Dahi resulta finalmente que a *perpendicular tirada de qualquer ponto de uma das faces de um angulo diedro recto sobre a outra face existirá toda na primeira face.* Porque, si assim não fosse, tirando do mesmo ponto a perpendicular á aresta, teriamos ahi uma segunda perpendicular ao plano.

Somos assim conduzidos a concluir o exame das posições mutuas entre as rectas e os planos por duas observações, das quaes uma constitue a reciproca de um theorema que já foi indicado. Pela primeira, é facil vêr que a *intersecção de dois planos* M *e* N, *perpendiculares a um terceiro* P, *forma o eixo* SA *deste ultimo* (Fig. 100), *correspondente ao traço da dita intersecção nelle.* Porque tal eixo deve existir simultaneamente nos dois planos, em virtude de tudo o que precede. O mesmo se diria de qualquer numero de planos perpendiculares a um outro, e que se cortassem segundo a mesma recta: esta seria um eixo do plano perpendicular commum.

A outra observação a que nos referimos *consiste no mutuo parallelismo do conjunto das perpendiculares ou eixos de um plano.* E' o que resulta do confronto delles, dois a dois; pois que o segundo é perpendicular á recta que une os traços de ambos no plano dado e existe no plano determinado por esta recta com o primeiro eixo. Generaliza-se, destarte, ás rectas existentes em qualquer situação do Espaço a observação que nos fez reconhecer o mutuo parallelismo do conjunto das rectas existentes em um plano parallelo a um terceiro.

132 — Exame das consequencias deduzidas das posições

MUTUAS DAS RECTAS E DOS PLANOS. Devemos agora examinar as consequencias que, para a medida dos comprimentos rectilineos, resultam das *posições* mutuas das rectas e dos planos. Similhantes consequencias, reciprocamente encaradas, vão servir depois para determinar a posição mutua das rectas e dos planos, ou dos planos entre si, por intermedio da medida de linhas rectas.

I. Os segmentos rectilineos determinados por um plano e uma recta que lhe fôr obliqua podem offerecer todas as grandezas, desde zero até o infinito. E não é possivel apanhar nenhuma lei entre elles quando considerados indistinctamente. Uma relação sómente se manifesta entre as rectas mutuamente parallelas, e desde então existindo em cada um dos planos que passar pela obliqua. Porque ellas ficam entre esta recta e o traço do seu plano no primeiro plano, isto é, são partes de parallelas comprehendidas entre duas rectas concorrentes. Mas, o exame deste caso já foi feito na theoria fundamental da linha recta.

Si a recta em vez de ser obliqua fôr parallela ao plano, os segmentos interceptados entre ella e o plano se dispõem segundo os planos que passam pela parallela e encontram o primeiro. E os segmentos existentes em cada um desses planos se classificam em fileiras constituidas cada uma pelos segmentos que têm a mesma direcção, isto é, que são mutuamente parallelos. Reconhece-se assim que os segmentos de cada fileira são iguaes entre si. Para isto basta comparar, com um dos segmentos, qualquer outro da mesma fileira; a *indeterminação* dos comprimentos confrontados póde substituir a *infinidade* do seu numero, conforme um artificio logico já apreciado. Os dois segmentos parallelos existem então entre duas rectas parallelas, a saber a recta dada e a *aresta* do angulo diedro formado pelo plano delles com o plano dado, o que acarreta a uma igualdade. As perpendiculares ao plano sendo parallelas entre si, os segmentos perpendiculares interceptados entre o plano e a sua parallela serão iguaes.

Considerando agora um feixe de rectas que irradiam de qualquer ponto da parallela para o plano, verifica-se que a perpendicular corresponde á distancia minima da parallela para o plano, conforme o indica a inducção theocratica. Esta observação resume similhante serie de confrontos na *determinação do minimo afastamento entre duas rectas situadas de qualquer modo no Espaço*. Taes rectas, em geral, não se cortam, nem são parallelas, e é evidente que a mais curta distancia entre ellas é uma linha recta. Demais, deve ser perpendicular a ambas; porque si fôsse obliqua sobre uma dellas, seria mais longa que a perpendicular baixada sobre ella do ponto em que a mesma obliqua encontrasse a outra. O problema da minima distancia pode assim se decompôr em duas questões connexas mas distinctas. Consiste a primeira em determinar o minimo afastamento entre um ponto qualquer de uma das rectas e o plano parallelo a ella, conduzido segundo a outra, abstrahindo do conhecimento dos pontos que mais se aproximam em ambas. A segunda questão visa justamente a determinação de taes pontos, e a sua solução baseia-se na questão precedente.

1.ª Quanto á minima distancia entre um ponto qualquer B de uma das rectas A B e o plano parallelo a ella, conduzido segundo a outra C D (Fig. 101), vê-se, pelo que precede, que ella é marcada pela normal B G tirada daquella recta para o plano que lhe é parallelo, e contém a outra C D. Esse plano D E F será determinado, traçando por um ponto arbitrario E da segunda recta, C D, uma parallela E F á primeira.

2.ª Isto posto, para achar os pontos de minimo afastamento das duas rectas, basta imaginar pelo pé de qualquer das normaes B G, tiradas da primeira recta A B para o plano D E F, construido como acabámos de dizer, uma parallela G I a essa recta A B. Pois que esta parallela é o lugar geometrico dos pontos de tal plano que mais se aproximam da primeira recta A B. E, como este plano contém inteiramente a segunda recta C D, o ponto desta que menos dista da primeira, deve ser a intersecção I da mencionada parallela com a segunda recta.

Obtida similhante intersecção I basta dirigir della uma normal IK á primeira recta AB, para ter o ponto desta, K, que mais se aproxima da mesma intersecção.

II. Imaginando agora que a obliqua é substituida por qualquer dos planos que por ella passam, verifica-se que o diedro assim formado dá lugar a observações analogas (I), em relação aos segmentos rectilineos interceptados pelas suas faces. Com effeito, esses segmentos offerecem, com uma variedade incomparavelmente superior, todas as grandezas desde zero até o infinito. E não é possivel apanhar nenhuma lei entre elles, considerados indistinctamente. Uma relação só se manifesta entre os segmentos parallelos existentes em qualquer plano que corte as faces do angulo diedro; porque então elles ficam entre os traços do terceiro plano com os dois primeiros, isto é são partes de parallelas comprehendidas entre duas rectas concorrentes. Mas, o exame deste caso já foi realizado na theoria fundamental da linha recta.

Desde, porém, que os dois planos são parallelos, nota-se que os segmentos rectilineos que elles determinam podem ser classificados em feixes, constituidos cada um pelos segmentos parallelos. Reconhece-se então que os segmentos de cada feixe são iguaes entre si. Para isso, basta comparar, com um dos segmentos, qualquer outro do mesmo feixe: a *indeterminação* dos comprimentos confrontados substituindo a *infinidade* de seu numero, conforme o artificio já apreciado. Os dois segmentos existem então em um plano, cujos traços com os dois primeiros serão rectas parallelas entre si, em virtude do parallelismo destes. Vê-se assim que os dois segmentos tornam-se os lados oppostos de um parallelogrammo.

As perpendiculares aos dois planos sendo parallelas entre si, os respectivos segmentos determinados pelos planos tambem serão iguaes: Verifica-se assim deductivamente que dois planos parallelos são equidistantes seja qual fôr a direcção segundo a qual se aprecia o mutuo afastamento dos seus pontos. E considerando o feixe de rectas que emergem de qual-

quer ponto de um dos planos para o outro, confirma-se que a distancia minima corresponde á normal, conforme o indica a inducção theocratica. Assim, as rectas parallelas aos planos e os planos parallelos entre si apresentam, quanto aos segmentss rectilineos interceptados pelo seu concurso, as mesmas leis que constatamos entre os segmentos rectilineos determinados por duas rectas parallelas. Somos assim levados a estender similhante exame, generalizando-o, segundo o mesmo espirito, ao caso de um numero qualquer de rectas cortadas por três parallelas existentes num só plano. Si as rectas continuassem a ser suppostas convergindo para um ponto, a substituição das parallelas por planos nenhuma observação nova podia suggerir. Porque, comparando a primeira convergente com qualquer das outras, conforme o artificio logico já empregado, ellas constituirão as mesmas relações que no caso plano. A successão dos planos de cada duas convergentes não alteraria então em cousa alguma os raciocinios feitos quando todos esses planos se confundissem em um só. O caso actual separa-se, entretanto, do que já foi considerado na theoria fundamental da linha recta, quando as rectas se acham situadas de qualquer modo no Espaço. Para perceber a relação que existe então entre os segmentos rectilineos, supponhamos que as perfurantes dos planos parallelos reduzem-se a duas AB e CD (Fig. 91). Unindo-se os traços dellas nos planos extremos LN, obtem-se um *quadrilatero reverso*, que será decomposto em dois triangulos por qualquer das diagonaes AD. Ora, unindo o traço I de similhante diagonal no plano medio M aos traços E e F das perfurantes no mesmo plano, reconhece-se que *os segmentos rectilineos interceptados por três planos parallelos são proporcionaes:*

$$AE:EB::AI:ID \text{ e } AI:ID::CF:FD,$$

donde

$$AE:EB::CF:FD.$$

Dahi é facil estender o mesmo theorema a um numero

qualquer de perfurantes, e conceber, emfim, as relações que podem existir entre todos os segmentos rectilineos determinados por planos parallelos que se succedem segundo uma certa lei. Tal é a conclusão dos confrontos a que dá lugar o exame das disposições mutuas das rectas e planos, quando se consideram as combinações de dois planos. Convém notar, com effeito, que embora tenhamos por vezes imaginado mais de dois planos, no decurso da apreciação precedente, a presença dos planos que excediam ao segundo não introduziu nenhuma noção essencialmente nova, quanto ás combinações dos planos.

133 — Guiados pelo que precede, podemos agora apreciar as combinações de três ou mais planos entre si. Logo que três ou mais planos se interceptam segundo as rectas SA, SB, SC..., concorrendo todas no mesmo ponto S, obtem-se o que se chama um *angulo polyedro* (Fig. 102). Designam-se particularmente pelos nomes de angulos triedros, tetraedros, pentaedros, hexaedros, etc..., os angulos polyedros formados por três, quatro, cinco, seis, etc., planos concorrentes. E é facil de verificar que cada uma destas figuras corresponde sempre a um polygono de numero de lados determinado. Com effeito, consideremos um polygono qualquer ABCDE (Fig. 102) e um ponto S situado fora do seu plano. A figura que se obtem traçando as rectas SA, SB, SC, SD, SE, é um *angulo polyedro*, e o numero de planos que concorrem no ponto S para formar este angulo é igual precisamente ao numero de lados do polygono dado. Vê-se, além disso, que são necessarios pelo menos três planos para formar um angulo polyedro, do mesmo modo que são precisas pelo menos três rectas para determinar um polygono.

O ponto S denomina-se o vertice do angulo polyedro, os planos SAB, SBC, etc. são as suas *faces*, as quaes, cortando-se duas a duas, formam assim os *angulos diedros do polyedro*. As intersecções dessas faces, isto é as rectas SA, SB, SC, etc. são chamadas *arestas*. As faces são por conseguinte

representadas pelos angulos rectilineos A S B, B S C, etc. que tambem são chamados *angulos planos*, para distinguil-os dos *angulos diedros* do polyedro. O angulo polyedro compõe-se, pois, de quantidades angulares; é a inclinação mutua de suas arestas e de suas faces que lhe determina o valor, o qual, similhantemente ao do angulo rectilineo, não depende de modo algum do comprimento das arestas, sendo por conseguinte relativo.

Diz-se que um *angulo polyedro* é *convexo* quando fica situado inteiramente de um mesmo lado de qualquer de suas faces, quando prolongada indefinidamente em todos os sentidos. Dahi resulta que um angulo polyedro convexo não pode ser cortado em mais de dois pontos por uma mesma recta. E, com effeito, todo plano tirado por essa recta, corta evidentemente o angulo polyedro segundo um polygono plano e convexo, visto como fica este situado todo inteiro de um mesmo lado de qualquer das rectas que o formam, quando prolongada indefinidamente. Ora, a recta considerada só encontrando este polygono em dois pontos, não poderia ter evidentemente outro ponto commum com o *angulo polyedro*.

Um angulo polyedro não convexo é chamado *concavo;* mas o estudo dos polyedros concavos não offerece utilidade, e em tudo o que se segue suppol-os-hemos convexos. Aliás, similhante distincção não é applicavel evidentemente ao mais simples dos angulos polyedros, isto é ao de três faces ou *triedro* que é sempre convexo, e cujas propriedades passamos a examinar.

Por ser o triedro o *mais simples* dos angulos polyedros, o estudo destes se reduz essencialmente ás propriedades daquelle. Porque conduzindo planos diagonaes de uma das arestas para todas as outras não consecutivas, se pode decompôr sempre um angulo polyedro qualquer em triedros, como se decompõe um polygono em triangulos.

O estudo das propriedades dos angulos polyedros fornece o intermediario normal entre a apreciação da superficie plana

e a dos polyedros propriamente ditos. Porém convenientemente instituido, similhante exame torna-se de facto reductivel ao caso mais simples, isto é, ao do angulo triedro, donde se pode deduzir tudo aquillo que se refere aos angulos mais compostos.

134 — EXAME DAS COMBINAÇÕES DE TRÊS PLANOS: ANGULOS TRIEDROS. — I. Cada angulo triedro é definido pelos três angulos rectilineos que limitam as faces, e por três angulos diedros que caracterizam as inclinações mutuas destas: seis elementos ao todo.

Comparando entre si os oito angulos triedros formados por três planos que concorrem em um ponto (Fig. 103), nota-se que a cada um corresponde um outro, cujas faces são prolongamentos das faces do primeiro. Aos que se acham em taes condições dá-se a denominação de *verticalmente oppostos*, por analogia aos angulos rectilineos cujos lados são prolongamentos uns dos outros. Comparando mutuamente os angulos triedros verticalmente oppostos, constata-se a igualdade de seus respectivos elementos dois a dois.

Com effeito, as faces de cada um são limitadas por angulos verticalmente oppostos aos da face do outro; e os angulos diedros do segundo são oppostos pela outra aos diedros do primeiro. Verifica-se, porém, que, apesar dessas igualdades dos seus elementos, os triedros verticalmente oppostos não são, em geral, susceptiveis de *superposição;* porque as faces e os angulos diedros de um se succedem em ordem inversa aos do outro. Tal impossibilidade só desapparece em relação aos triedros que têm duas faces iguaes; pois que então a ordem das faces torna-se indiferente.

Reconhece-se assim que nesta hypothese especial, as regiões do Espaço circunscriptas pelos triedros verticalmente oppostos são *iguaes;* o que permitte constatar, como veremos, a *equivalencia* nos outros casos em que os seis elementos são respectivamente iguaes. Somos assim conduzidos a examinar systematicamente as condições de existencia de cada angulo

triedro isoladamente considerado, antes de proseguir na comparação de uns com os outros.

II. A primeira observação que logo occorre é que, com três faces arbitrariamente escolhidas, só será possivel construir um angulo triedro *quando uma dellas fôr menos do que a somma das outras duas.* Basta imaginar as três faces juxtapostas sobre um plano e tentar depois construir o angulo triedro, fazendo girar cada face lateral em torno da sua aresta commum com a face media, para reconhecer essa propriedade fundamental. Porque é evidente que si a face media fôr igual á somma das faces lateraes, estas irão juxtapôr-se sobre ella depois de meia revolução. E si a face media fôr maior do que a somma das lateraes, estas deixarão entre si, depois de meia revolução, um angulo sobre a face media. E' só quando a face media é menor do que a somma das lateraes que estas se encontram pelas arestas livres, antes de completar meia rotação, formando um angulo triedro com a face media.

Mas, esta propriedade pode ser demonstrada deductivamente, fazendo-a recair no principio fundamental relativo aos lados dos triangulos rectilineos: *um lado qualquer é menor do que a somma dos outros dois.* Note-se porém que a demonstração só pode existir em relação á face maior comparada com a somma das outras duas, isoladamente menores.

Com effeito, consideremos o angulo triedro $SMNP$, onde suppomos MSP a maior das faces (Fig. 104). Cortando as duas arestas SM e SP por qualquer linha recta AB, tracemos o angulo $ASC = MSN$; tomemos $SD = SC$, e liguemos o ponto D aos pontos A e B. Isto feito, os triangulos SAD e SAC são iguaes, por terem um angulo igual comprehendido por lados iguaes; logo $AD = AC$. Ora, sendo $AB < AD + DB$, ou $AC + CB < AD + DB$ será $CB < DB$, por ser $AC = AD$. Nestas condições, os triangulos SBC e SBD têm um lado commum SB, $SD = SC$ e $BC < BD$, e como ao menor lado se oppõe o menor angulo, se-

gue-se que $\wedge CSB < DSB$. Logo, ajuntando de uma parte e de outra os angulos iguaes ASC e ASD, virá finalmente:

$$CSB + ASC < DSB + ASD$$

ou emfim

$$MSP < NSP + MSN.$$

Sendo tambem $MSP + MSN > NSP$, segue-se que $MSP > > NSP - MSN$, de sorte que esta propriedade pode ainda ser enunciada desta maneira: *Uma face qualquer é maior do que a differença das outras duas*, similhantemente ao que acontece no triangulo rectilineo, onde vimos que um lado qualquer é sempre maior que a differença dos outros dois. Vê-se assim que os seis elementos de um angulo triedro apresentam uma connexidade não menos intima que a existente entre os seis elementos de um triangulo rectilineo.

III. Similhante analogia estende-se a outras propriedades dos angulos triedros. E' assim que se pode demonstrar que *si duas faces de um angulo triedro são respectivamente iguaes ás duas faces de um outro angulo triedro, e si o angulo diedro comprehendido entre as primeiras fôr maior que o angulo diedro comprehendido entre as duas outras, a terceira face do primeiro triedro será maior que a terceira face do segundo.*

Com effeito, sejam S e S' os dois triedros (Fig. 105) e supponhamos que sejam iguaes as faces ASB e $A'S'B'$ bem como BSC e $B'S'C'$, e que seja o diedro $SB > S'B'$. Tomemos sobre a aresta commum um comprimento $So = S'o'$, e pelos pontos o e o' levantemos em cada uma das faces as perpendiculares op, oq, $o'p'$ e $o'q'$.

E' visivel que os angulos rectilineos poq e $p'o'q'$ representam respectivamente as inclinações dos diedros SB e $S'B'$; e como aquelle diedro é maior do que este, segue-se que o angulo $poq > p'o'q'$. Isto posto, deprehende-se que são iguaes os triangulos rectangulos oSp e $o'S'p'$ bem como oSq e $o'S'q'$ (por ser $oS = o'S'$ e $\wedge oSp = o'S'p'$) donde se conclue que

$op = o'p'$ e $oq = o'q'$. Nestas condições ligando os pontos p a q e p' a q', vê-se que nos triangulos poq e $p'o'q'$ se tem $pq > p'q'$, visto como $\wedge poq > p'o'q'$. Mas sendo $pq > p'q'$, os triangulos pSq e $p'S'q'$ nos levam a concluir que $\wedge pSq > > p'S'q'$, isto é que a face $ASC > A'S'C'$.

Similhantemente, se pode verificar que *em qualquer angulo triedro, ao maior angulo diedro fica opposta a maior face*. Com effeito, consideremos o triedro SABC (Fig. 105) em que o angulo diedro SB é maior que o angulo diedro SA, e mostremos que $ASC > BSC$. Para isto conduzamos pela aresta SB um plano BSD, que faça com a face BSA um angulo diedro igual a SA. O triedro SABD tendo assim dois diedros iguaes, suas faces BSD e DSA, oppostas a estes angulos, serão iguaes, isto é $BSD = DSA$. Mas no triedro SBCD, temos $BSC < BSD + DSC$; logo, substituindo ahi a face BSD por sua igual DSA, virá

$$BSC < DSC + DSA, \quad \text{ou} \quad BSC < CSA,$$

ou emfim

$$ASC > BSC.$$

Esta propriedade e a anterior permittiriam mostrar que, reciprocamente, *á maior face se acha opposto o maior angulo diedro.*

135 — Noções de symetria e de igualdade. — I. Notemos, entretanto, que, apesar das analogias indicadas precedentemente, cumpre fazer uma distincção importante: Ao passo que um triangulo fica determinado desde que os três lados são escolhidos de modo que qualquer um seja menor que a somma dos outros dois, um angulo triedro não fica sufficientemente caracterizado quando se dão três angulos rectilineos, dos quaes um é menor que a somma dos outros dois. Porque a ordem em que os angulos são dispostos affecta apenas a posição do triangulo, e conseguintemente o modo de produzir a sua super-

posição. Assim, os triangulos cujos lados são respectivamente iguaes e dispostos na mesma ordem, podem ser considerados como um só triangulo deslisando sobre o mesmo plano, ou sobre planos parallelos. Elles podem, pois, ser superpostos, quando existem no mesmo plano, sem sair deste. E quando os lados são dispostos em ordem inversa, a coincidencia de dois triangulos não se pode operar sem a rotação previa de um delles em torno de um eixo traçado no seu plano. A superposição requer, pois, unicamente que um dos triangulos saia primeiro do seu plano.

No caso, porém, dos angulos triedros, a mudança de ordem na disposição das faces torna impossivel a superposição, desde que duas faces consecutivas não forem iguaes entre si; isto é, quando elles não forem *isoedros*. Somos assim levados a examinar systematicamente as condições de *determinação* dos angulos triedros, ou o que é o mesmo, os casos de *igualdade* de taes angulos.

II. *Igualdade dos triedros, e como se distingue da symetria.* Vejamos, pois, como é possivel descobrir d'entre os seis elementos de um triedro, isto é: três angulos rectilineos que limitam as suas faces, e três angulos diedros que resultam da inclinação dellas, quantos são necessarios e sufficientes para caracterizar inteiramente um tal angulo, e em que condições é isto possivel.

Seguindo a marcha adoptada em relação ao exame analogo que fizemos para os triangulos rectilineos, comecemos por considerar o caso em que são dados uma face e os dois diedros adjacentes a ella.

1.º *Construir um angulo triedro, sendo dada uma face e os dois angulos diedros adjacentes.* Salvo o caso do angulo symetrico, resultante das duas disposições inversas que podem ter os angulos diedros, vê-se que o problema é determinado. Dahi conclue-se este caso geral de *igualdade dos triedros que têm duas faces, uma em cada triedro, respectivamente iguaes; iguaes os angulos diedros adjacentes a elles e collocados na*

mesma ordem. A superposição verifica tambem directamente a igualdade de que se trata. Com effeito, fazendo coincidir a face A S B com a sua igual A' S' B' (Fig. 106), vê-se que, pela igualdade dos angulos diedros adjacentes, coincidirá o plano S B C com S' B' C', e S A C com S' A' C'; logo S C coincide com S' C', e os angulos triedros sobrepostos um ao outro coincidindo em todas as suas partes serão por conseguinte iguaes.

2.º *Construir um triedro, dadas duas faces e a sua inclinação mutua*. A segunda face podendo tomar duas posições symetricas em relação á primeira, vê-se que o problema só é inteiramente determinado, quando se conhece a ordem em que as faces devem ser dispostas.

Dahi se conclue que *dois triedros serão iguaes quando tiverem duas faces respectivamente iguaes, dispostas do mesmo modo, e igual o angulo diedro formado por ellas*. A superposição demonstra, aliás, directamente essa igualdade. Com effeito, appliquemos a aresta S B sobre S' B' (Fig. 106) e façamos coincidir os angulos diedros correspondentes, que suppomos iguaes; então pela igualdade das faces cairá S A sobre S' A' e S C em S' C': logo, ajustando-se tambem as terceiras faces A S C e A' S' C', os angulos triedros coincidem em todas as suas partes, e são por conseguinte iguaes.

3.º *Construir um triedro dadas duas faces e o angulo diedro opposto a uma dellas*. Suppondo que o problema é possivel, teremos sempre que distinguir o caso da symetria do da igualdade. Isto posto, consideremos as hypotheses que se podem propôr. Para isso imaginemos juxtapostas em um plano as faces dadas, e figuremos o plano indefinido da face incognita em sua inclinação conhecida em relação a uma das faces. Supponhamos, agora, que a face opposta a essa inclinação gira em torno da aresta commum á outra face dada, approximando-se do plano indefinido da terceira face. Neste giro, a sua aresta exterior descreverá uma superficie conica, que poderá encontrar ou não o plano da face incognita. Si não encontrar, não haverá angulo triedro, si encontrar poderá tan-

gencial-o ou cortal-o, segundo duas geratrizes. Na primeira hypothese haverá um angulo triedro; na segunda, haverá dois angulos triedros e resta saber si ambos satisfazem aos dados do problema.

Para decidirmos sobre este ponto, convém attender á grandeza relativa das faces conhecidas. Com effeito, si a inclinação dada fôr opposta á menor das faces conhecidas, comprehende-se que a superficie conica, descripta por esta, ou não encontrará o plano indefinido da terceira face, ou o encontrará, já o tangenciando apenas, já o cortando. No caso de não o encontrar não ha triedro, como já notámos acima. No caso de o tangenciar haverá um angulo triedro determinado. Porém no caso de secancia, esta se operando do mesmo lado da segunda face conhecida, existirão dois angulos triedros que satisfazem ao problema. Este será, pois, indeterminado. Quando, porém, a inclinação conhecida fôr opposta á maior das faces dadas, a superficie conica descripta por esta, nas condições supra, cortará sempre o plano indefinido da terceira face segundo duas geratrizes separadas pelo plano da menor face. Haverá dois angulos triedros; mas só um satisfará ao problema, porque o outro terá, para inclinação sobre a face menor, o supplemento da inclinação dada, ou será symetrico do primeiro. Esta symetria terá lugar quando a inclinação dada fôr rectangular. Conclue-se dahi que *dois angulos triedros serão iguaes, quando tiverem duas faces iguaes dispostas do mesmo modo, e iguaes respectivamente os angulos diedros oppostos á maior das faces dadas.*

4.º *Construir um triedro com três faces dadas.* Já notámos igualmente que a variação na disposição das faces pode dar lugar a dois triedros, e que a superposição é evidentemente impossivel quando as faces não se succederem na mesma ordem nos dois triedros. Desde, porém, que as faces forem collocadas na mesma disposição, é intuitivo que não podemos formar sinão um só angulo triedro. Donde se conclue bue *dois angulos triedros serão iguaes quando tiverem as fa-*

ces iguaes e dispostas na mesma ordem. E' facil, aliás, verificar que a superposição dos dois triedros é então exequivel. Imaginemos, com effeito, que se tomam respectivamente nas arestas dos triedros pontos que sejam equidistantes dos vertices e que se faça passar por elles, em cada triedro, um plano (Fig. 106). Reconhece-se logo a igualdade dos triangulos assim obtidos nesses planos, e que os seus lados se succedem na mesma ordem.

Isto posto, as perpendiculares baixadas dos vertices dos triedros sobre taes planos cairão em pontos respectivamente equidistantes dos vertices dos mesmos triangulos. Demais a igualdade de dois dos triangulos rectangulos que, em cada triedro, têm para lados a perpendicular e uma das arestas, mostra a igualdade das duas perpendiculares. Portanto, si fizermos um dos triedros penetrar no outro, de forma que os triangulos dos planos secantes coincidam, os vertices coincidirão tambem como extremos das perpendiculares iguaes. Desde então as arestas de ambos os triedros se confundirão tambem, duas a duas, em virtude da coincidencia das suas extremidades: Os dois triedros se superporão, pois, inteiramente. Quando as faces dadas forem iguaes entre si, é claro que só se poderá formar um triedro, conforme já observámos acima. Portanto, os triedros em taes condições se superporão, como aliás o mostraria directamente a construcção supra.

Comparemos agora os triedros formados por faces respectivamente iguaes, collocadas, porém, em ordem inversa. Imaginemos em ambos a construcção precedente. Podem occorrer duas hypotheses: a perpendicular pode cair dentro ou fora do triangulo determinado pelo plano secante. Si a perpendicular cair dentro do angulo triedro, reconhece-se que os planos que passam por cada aresta e pela mesma perpendicular decomporão o triedro em três triedros *isosceles*. Constata-se assim que os dois triedros são constituidos por elementos susceptiveis de superposição; ambos abrangem, pois, *regiões equivalentes* do Espaço. Mas, descobre-se, além disso, que os angu-

los diedros são tambem respectivamente iguaes e apenas dispostos em ordem inversa.

Si a perpendicular caisse fora do angulo triedro, este resultaria do concurso de três angulos triedros isosceles; apenas, em vez de sommal-os, teriamos então de subtrahir um da somma dos outros dois. Mas, as conclusões seriam as mesmas, quanto aos triedros primitivos.

Vê-se por ahi que dois angulos triedros constituidos com as mesmas faces, ou coincidem, ou podem ser considerados como verticalmente oppostos que se separaram. Mas, além desta posição mutua, dois triedros que só differem pela ordem das suas faces, podem ser collocados *symetricamente* em relação a um plano de varios modos: Por exemplo, juxtapondo-os por duas faces iguaes, elles ficam symetricos em relação ao plano commum das mesmas faces. Si os imaginassemos collocados do mesmo lado de um plano e repousando neste por duas faces respectivamente iguaes que estivessem coincidindo por uma aresta, os triedros seriam symetricos em relação ao plano perpendicular ao das faces e que passa pela aresta commum; e assim outras disposições. Seria inutil entrar aqui na demonstração de tal proposição, porque ella será finalmente construida desde que conhecermos a theoria da medida dos angulos diedros pelos angulos rectilineos.

Deste facto resulta a denominação de angulos *symetricos* dada aos triedros que têm os elementos iguaes e dispostos em ordem inversa. Cournot (em sua Geometria de Posição), diz ter sido Legendre quem primeiro apreciou systematicamente as figuras symetricas.

Desde então a palavra *igualdade* ficou reservada para os casos em que as figuras podem ser superpostas. A *symetria* suppõe a igualdade dos elementos, e a *equivalencia* das respectivas extensões, sem possibilidade de superposição. A equivalencia corresponde á identidade das extensões com a diversidade total das formas. Collocados em posições symetricas, dois angulos triedros, que só differem pela disposição das fa-

ces, se manifestam como sendo um identico ao outro virado pelo *avesso*.

5.º *Construir um angulo triedro conhecidos os três angulos diedros*. Ha a mesma restricção mencionada no 1.º caso, quanto ao angulo symetrico. Isto posto, imaginemos dois angulos diedros dados, dispostos de modo que as aberturas fiquem confrontes, e duas faces coincidam, as suas arestas se encontrando. As segundas faces se interceptarão, formando um angulo diedro que será igual ao terceiro diedro, ou differente delle. Si fôr igual, estará resolvido o problema. Si fôr differente, é claro que girando no sentido adequado a face coincidente de um dos diedros em torno do ponto de encontro das arestas, o diedro formado pelas faces distinctas poderá crescer ou diminuir até tornar-se igual ao terceiro diedro dado. Donde se conclue que *dois angulos triedros serão iguaes quando tiverem os três angulos diedros respectivamente iguaes e dispostos na mesma ordem*. A não ser neste caso, sem analogo nos triangulos rectilineos, verifica-se em todos os outros que os seis elementos, rectilineos e diedros, de um angulo triedro, apresentam uma connexidade não menos intima que a dos seis elementos de um triangulo. Todavia, esta comparação dos dois typos suscita como vimos uma distincção importante, na qual, sob o nome de *symetria*, se reconhece uma igualdade sem coincidencia, que não pode existir nas figuras planas.

136 — DETERMINAÇÃO DOS ANGULOS POLYEDROS. O estudo que acabámos de effectuar quanto aos angulos triedros, nos habilita a considerar o caso geral dos conjuntos formados por um numero qualquer de planos que convergem em um ponto.

A este conjunto, desde então constituido pelo concurso de faces angulares rectilineas, denominou-se, como dissemos, *angulos polyedros:* os angulos triedros são o seu typo mais simples. Ora, é facil reconhecer que todo angulo polyedro pode ser considerado como um aggregado de angulos triedros. Basta, para isto, imaginar planos por uma aresta e as que não lhe são immediatas. Entre taes angulos já vimos que se distin-

guem os que são *convexos* dos que têm algum dos angulos diedros reentrantes. Estes podem sempre ser decompostos em angulos polyedros convexos. Os angulos triedros são, por sua natureza, sempre convexos. Mas, a partir dos angulos tetraedros os dois typos coexistem. E é facil de perceber a analogia dessas observações com as que surgiram pela comparação dos polygonos planos com os triangulos.

A' vista da decomposição dos angulos polyedros em angulos triedros, comprehende-se que as propriedades dos primeiros devem deduzir-se das dos ultimos. E' assim que *dois angulos polyedros serão iguaes quando forem constituidos por angulos triedros iguaes e dispostos na mesma ordem.* Reconhece-se deste modo que os angulos polyedros dão lugar ás mesmas observações que os triedros, quanto á *igualdade* e *symetria*, isto é: igualdade sem coincidencia. Assim tambem a propriedade fundamental dos angulos triedros, *a maior face é menor que a somma das outras duas*, conduz a constatar que nos angulos polyedros convexos, *a somma das faces conserva-se sempre inferior a quatro angulos rectos*, conforme o indica a observação immedita. Para isto basta examinar a figura resultante da intersecção de todas as arestas de um angulo polyedro S A B C D E por um plano (Fig. 102). Dividindo o polygono resultante A B C D E em triangulos, tendo todos o vertice commum O no interior delle, obtemos assim tantos triangulos com o vertice em O, quantos são os de vertice em S, e a somma dos angulos de uns é igual á dos outros. Portanto tudo se reduz a mostrar que a somma dos angulos com o vertice em S é menor que a dos angulos com o vertice em O, equivalentes como sabemos a 4 $\wedge$ rectos. Para isto basta applicar a cada um dos triedros obtidos com os vertices em A, B, C, D e E, a propriedade fundamental acima citada (n.º 135); o que dará:

no angulo triedro A $\quad SAB + SAE > BAE$

» » » » $\quad$ » » » $> BAO + OAE$

no angulo triedro B $SBA + SBC > ABC$
» » » » » » » $> ABO + OBC$
» » » C $SCB + SCD > BCD$
» » » » » » » $> BCO + ODC$

e assim nos demais angulos triedros.

Sommando-se as desigualdades membro a membro, vê-se que a somma dos angulos da base nos triangulos de vertice S é maior que a somma dos angulos da base dos triangulos de vertice O: logo para haver compensação, a somma dos terceiros angulos em S é menor que a somma dos terceiros angulos em O, isto é, deve ser menor que 4 rectos.

Consequencia. Da propriedade precedente deduz-se os limites necessarios entre os quaes se acha, em qualquer angulo triedro, a somma de suas faces: *A somma das faces tem por limites zero e 4 angulos rectos*, ou *0* e *360*; pelo que pode um angulo triedro ter por faces 3 angulos agudos, ou 3 rectos, ou 3 obtusos, ou de uns e de outros promiscuamente, sem excepção.

140 — Resulta do que precede uma importante restricção no modo de construir os corpos polyedricos, isto é os *polyedros* propriamente ditos.

O estudo que temos feito da superficie plana e dos angulos polyedros, nos habilita com effeito a apreciar a constituição dos corpos polyedricos bem como as suas principaes propriedades. Um polyedro diz-se *regular* quando todas as suas faces são polygonos regulares iguaes, e quando são tambem iguaes todos os seus angulos polyedros; chama-se *irregular* no caso contrario.

Concebe-se á priori que a subordinação dos elementos dos angulos polyedros á lei das faces, que acima indicámos, deve até certo ponto restringir o numero desses corpos regulares. Esta restricção vai mesmo muito além do que se pode suppor, e é isto que passamos a verificar, apreciando as consequencias que resultam do accrescimo dos angulos reunidos em

cada vertice do polyedro á medida que elles provêm de polygonos mais complexos.

A variedade de taes polyedros regulares é apenas cinco, por isso qne a somma das faces de um angulo polyedro é sempre inferior a 4 angulos rectos. Com effeito si se representar o numero de lados de um polygono regular qualquer, o angulo do vertice desse polygono tem como vimos para valor

$$V = \frac{2\,(n-2)}{n} \wedge \text{ rectos}$$

Para o triangulo equilatero, será portanto

$$V_3 = \frac{2}{3} \text{ do } \wedge \text{ recto}$$

e portanto não se poderá grupar senão 3, 4 ou 5 destes triangulos em torno de um ponto para formar um angulo polyedro, visto como seis já prefaziam $6 \times 60^\circ = 360$ ou 4 rectos.

Para o quadrado, sendo

$$V_4 = 1 \wedge \text{ recto,}$$

não se poderá grupar mais de tres em torno de um ponto.

Para o pentagono regular

$$V_5 = \frac{6}{5} \text{ do } \wedge \text{ recto} = 108^\circ;$$

portanto não se poderá ainda grupar mais de 3 em torno de um ponto. Para o angulo do hexagono regular achariamos 120°; tres vezes este angulo vale 360°, e portanto com hexagonos não se podem mais formar angulos polyedros nem por conseguinte polyedros. Concluimos pois que só existem cinco polyedros regulares convexos, isto é, três construidos com trian-

gulos equilateros, um com quadrados e um com pentagonos; de sorte que o pentagono regular é o polygono de maior numero de lados com que se podem construir polyedros regulares.

Taes polyedros são o *tetraedro* (Fig. 107), o *octaedro* (Fig. 108), o *icosaedro*(Fig. 109) o *hexaedro* ou *cubo* (Fig. 110), e o *dodecaedro* (Fig. 111). Aliás, similhante restricção pode tambem ser deduzida de um importante theorema, devido ao grande geometra Helvetico acerca da subordinação do numero de angulos e de vertices, ao de faces e de arestas de um polyedro qualquer.

Euler (Bale 1707-1783) instituiu, com effeito, a tal respeito o importante theorema, que pode assim ser enunciado: *Num corpo polyedrico qualquer, o numero de faces mais o numero de vertices equivale ao de arestas augmentado de duas unidades.* Representando por F o numero das faces, por V o de vertices ou angulos polyedros, e por A o de arestas, mostremos que effectivamente $F + V = A + 2$. Para isto, supponhamos que o polyedro se forma reunindo successivamente entre si as diffentes faces (Fig. 112). Seja n o numero de lados da face ABCDH, e v o numero de seus vertices; será evidentemente $n = v$ (1).

Consideremos a face BCEFG, adjacente á primeira, e designemos por n' e v' os numeros dos lados e dos vertices não communs á precedente. Como as duas faces têm um lado e dois vertices communs será:

$$n' = v' + 1 \ldots \quad (2)$$

Para uma terceira face, seria igualmente

$$n'' = v'' + 1 \ldots \quad (3)$$

e assim por diante.

Sommando ordenadamente estas igualdades e notando que a somma $n + n' + n'' + \ldots$ representa o numero A das ares-

tas, $v + v' + v'' + \ldots$ representa o numero V dos vertices, teremos:

$$A = V + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots)$$

Porém, a somma $(1 + 1 + 1 + \ldots)$ conterá tantas unidades quantas forem as igualdades acima menos uma, e estas igualdades são tantas quantas as faces menos uma; porque a ultima face, que fecha o polyedro, tem todos os lados e vertices communs com as outras: portanto

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = F - 2:$$

logo $A = V + F - 2$ ou $F + V = A + 2$ c. q. d.

Vejamos as consequencias que podem ser deduzidos do theorema de Euler.

I. *A somma dos angulos rectilineos de um polyedro convexo é igual a tantas vezes quatro rectos quantos são os vertices menos dois.*

Com effeito, seja ε esta somma. Si a, b, c ... e F e V designam, segundo as notações já empregadas, os lados, os numeros das faces e dos vertices, é evidente, em vista do que foi dito sobre os polygonos, que se tem a igualdade

$$\varepsilon = 2(a - 2) + 2(b - 2) + 2(c - 2) + \ldots =$$
$$= 2[a + b + c + \ldots - (2 + 2 + 2 + \ldots)].$$

Mas $a + b + c + \ldots$ representa o dobro das arestas, porque cada lado é commum a duas faces; e a somma $2 + 2 + + 2 + \ldots$ contém tantas parcellas quantas são as faces. Assim pois

$$a + b + c + \ldots = 2A \quad \text{e} \quad 2 + 2 + 2 \ldots = 2F,$$

donde resulta que

$$\varepsilon = 2(2A - 2F) = 4(A - F)$$

Ora, em virtude do theorema de Euler,

$$A - F = V - 2,$$

de sorte que substituindo se obtem finalmente a relação procurada

$$\varepsilon = 4(V - 2),$$

tomando para unidade o angulo recto.

II. *Em todo polyedro convexo as faces de um numero impar de arestas são sempre em numero par, e os vertices em que termina um numero impar de arestas são tambem um numero par.*

Com effeito, si c, d, e, f, g representarem os numeros das faces que têm 3, 4, 5, 6 etc. arestas, e $c' d' e' f' g' \ldots$ os numeros dos angulos polyedros de três, quatro, cinco, etc. faces do polyedro proposto, por isso que cada aresta pertence a duas faces e termina em dois vertices, teremos simultaneamente as igualdades seguintes:

$$2A = 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + \ldots$$
$$2A = 3c' + 4d' + 5e' + 6f' + 7g' + \ldots$$

Ora, subtrahindo de $2A$ a somma $2c + 4d + 4e + 6f + + 6g + \ldots$ o resto $c + e + g \ldots$ será evidentemente par, e o mesmo se dá com a quantidade $c' + e' + f' + g' + \ldots$ na segunda igualdade; o que prova o enunciado do corollario.

III. De outro lado, sendo $F = c + d + e + f + \ldots$ e $V = = c' + d' + e' + f' + \ldots$ é claro que substituindo estes valores, bem como o de A, obtido precedentemente na expressão $F + V = A + 2$, teremos, depois de haver dobrado todos os termos

$$2(c + d + e + f + \ldots) = 4 + c' + 2d' + 3e' + 4f' + \ldots,$$
$$2(c' + d' + e' + f' + \ldots) = 4 + c + 2d + 3c + 4f + \ldots,$$

equações que se transformam uma na outra pela permutação das letras c e c', d e d', etc. nos mostrando por conseguinte que as relações deduzidas para as faces devem tambem convir aos angulos ou vertices, e vice-versa. Ajuntando a segunda ao dobro da primeira, o que importa em eliminar c' entre ellas, achar-se-ha:

$$3c + 2d + e = 12 + (g + 2h + 3i + \ldots) + \\ + 2(d' + 2e' + 3f' + \ldots)$$

equação absurda quando se suppõe que c, d, e são nullas: Dahi resulta que *não ha nenhum polyedro em que todas as faces tenham mais de cinco lados, ou em que todos os vertices tenham mais de cinco arestas.* Si d e e são nullos, c vale pelo menos 4; si c e e são nullos d vale pelo menos 6, si c e d são nullos, e vale menos 12. Dahi se conclue que *um polygono onde não ha nenhuma face quadrangular ou pentagonal tem pelo menos quatro faces triangulares*; que *um polyedro onde não ha nenhuma face triangular ou pentagonal, tem pelo menos seis faces quadrangulares;* que *um polyedro não tendo nenhuma face triangular ou quadrangular, tem pelo menos doze faces pentagonaes;* que *um polyedro não tendo nenhum vertice tetraedro ou pentaedro, tem pelo menos quatro vertices triedros*; que *um polyedro não tendo nenhum vertice triedro ou pentaedro, tem pelo menos seis vertices tetraedros, e emfim que um polyedro não tendo nenhum vertice triedro ou tetraedro, tem pelo menos doze vertices pentaedros.*

Si d', e', f' ... sendo nullos, se suppõe que d, e, g, h ..., ou c, e, g, h ... sejam nullos ao mesmo tempo, ter-se-ha $c = 4$, ou $d = 6$, ou $e = 12$. Dahi resulta que *si todos os vertices de um polyedro são triedros, e só tem elle faces triangulares e hexagonaes ou quadrangulares e hexagonaes, ou pentagonaes e hexagonaes, possue necessariamente quatro faces triangulares*, ou seis *quadrangulares; e que si todas as faces de um polyedro são triangulares, e só tem elle vertices*

triedros e hexaedros, ou tetraedros e hexaedros, ou pentaedros e hexaedros, possue necessariamente quatro vertices triedros, ou seis vertices tetraedros, ou doze pentraedros.

Si d, e, f, g ... sendo nullos, se suppõe que todos os vertices sejam triedros, ou tetraedros, ou pentaedros, se tem $c = 4$, ou $3c = 1 + 2d'$, ou $3c = 12 + 4c'$; mas a equação (2) nos dá, permutando c e c', d e d' etc.:

$$3c' + 2d' + e' = 12 + (g' + 2h' + 3i' + \ldots) + \\ + 2(d + 2e + 3f + \ldots), \quad (3)$$

donde se tira nas duas ultimas hypotheses $d' = 6$ e $c' = 12$, e portanto $c = 8$ ou $c = 20$.

Si c, e, f ... sendo nullos, se suppõe que todos os vertices sejam triedros, se tem $d = 6$. E não se poderia suppôr que os vertices, tendo todos o mesmo numero de arestas, tivessem cada um mais de três; porque as equações (2) e (3) seriam então contradictorias.

Si c, d, f, g ..., sendo nullos, se suppõe que todos os vertices são triedros, ter-se-ha $e = 12$. Não se poderia suppôr que os vertices, tendo todos o mesmo numero de arestas, tivessem, cada um mais de três; porque as equações (3) e (3) seriam ainda contradictorias. Assim, pois, não pode haver sinão cinco especies de polyedros em que todas as faces têm o mesmo numero de lados, e todos os angulos o mesmo numero de arestas (11 a). Taes polyedros regulares são conhecidos desde a antiguidade (11 b).

Para que um *polyedro regular* fique determinado, basta evidentemente que se conheçam a grandeza de uma das faces

---

(11 a) Cirodde — Leçons de Géométrie, e M. Gergonue-Annales de Mathématiques

(11 b) Os primeiros manuscriptos dos Elementos de Enclides já continham dois livros sobre elles, devidos a Ipsicle, geometra e astronomo da escola de Alexandria, que floresceu pouco antes de Apollonius (146 A. C.). Estes dois livros sobre os polyedros regulares (que formam o 14º e o 15º da Geometria de Euclides) foram traduzidos do arabe por Companus durante a sua estadia na Hespanha.

e a inclinação dellas sobre as suas iguaes que concorrem no mesmo vertice. Outrotanto não acontece, porém, com os polyedros irregulares, onde o problema é muito mais complicado. Porque se pode conceber uma infinidade desses corpos, nos quaes não sómente as faces sejam desiguaes entre si, como desigualmente inclinadas umas sobre as oútras.

Entretanto, reduzindo este caso complexo a outros mais simples, os geometras antigos conseguiram resolvel-o. Para isto foi bastante decompôr os polyedros em *prismas* ou em *pyramides*, e principalmente nas mais simples destas, isto é, em *pyramides triangulares*, de que o *tetraedro*, acima citado (Fig. 107), é o typo mais perfeito; do mesmo modo que o hexaedro regular ou *cubo* (Fig. 110) é o mais simples dos *prismas*. Dá-se a denominação generica de *pyramides* do grego pyramis, (pyra, chamma) aos polyedros resultantes da secção de um plano sob o vertice de um angulo polyedro. Ellas tomam nomes especiaes segundo a forma de sua base: *pyramide triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., quando o polygono da base fôr um *triangulo*, um *quadrilatero*, um *pentagono*, etc. Si estes polygonos são regulares, a pyramide toma ainda o nome de *regular*. Chama-se eixo de pyramide á recta que une o seu vertice ao centro de base; si este eixo fôr perpendicular á base, será então a altura da pyramide, que toma neste caso o nome de recta. A pyramide diz-se *truncada* quando as faces são todas cortadas por um outro plano além da base, e a sua altura será neste caso a distancia entre esta e a base superior resultante da secção.

De resto concebe-se a possibilidade de juxtapôr muitas pyramides pelas suas faces, grupando-as todas em torno do vertice commum então collocado sobre um mesmo ponto. Si as alturas forem taes que as bases fiquem todas salientes, a superficie destas limitará a porção correspondente do espaço, formando assim um outro polyedro *convexo*, composto destas pyramides. Si ao contrario houver uma ou mais faces reentrantes, o polyedro será *concavo*. Um polyedro convexo fica,

portanto, de um mesmo lado de qualquer de suas faces, quando prolongada indefinidamente: Cortando-o por um plano, este determinará em sua superficie um polygono convexo.

Reciprocamente, é sempre possivel decompor qualquer polyedro num certo numero de pyramides tendo todos um vertice commum. Basta para isso tomar um ponto interior e ligal-o por linhas rectas a todos os vertices dos polygonos que formam as faces do polyedro: os planos conduzidos segundo essas rectas decomporão o polyedro em pyramides. E como os polygonos podem ser divididos em triangulos, torna-se evidente que o polygono dado pode ser ainda decomposto num certo numero de pyramides triangulares ou *tetraedros.*

Quando as faces do polyedro considerado forem planos parallelos a um mesmo eixo do corpo e todos cortados por dois outros planos parallelos entre si, recebe elle a denominação caracteristica de *prisma.* Os parallelogrammos assim determinados sobre os primeiros planos, que podem aliás ser em numero qualquer, são chamados faces do prisma; os polygonos determinados sobre os dois ultimos planos são as suas bases, e chama-se *altura* do prisma a mais curta distancia entre ellas.

Tem-se uma ideia geral do *prisma* imaginando-se que um polygono qualquer se desloque parallelamente a si mesmo, escorregando ao longo de uma recta fixa que passe por um dos seus vertices. Conforme o numero de lados deste polygono base, recebe o prisma as denominações particulares de prisma *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal* etc. Quando o prisma é cortado por um plano não parallelo ás suas bases, resulta ainda um polyedro, que tem o nome de *tronco* de *prisma* ou *prisma truncado.*

Chama-se *eixo* do prisma á recta que une os centros de suas bases; si esta recta é a mais curta distancia entre ellas, dá-se-lhe o nome de *altura* do prisma, que toma então o nome de *recto.* Quando as bases do prisma são tambem parallelogrammos, recebe elle a denominação de *parallelepipedo.* Por

sua vez o parallelepipedo diz-se *rectangulo* quando os parallelogrammos têm esta forma. O *parallelepipedo rectangulo* pode ainda ser definido como um prisma formado por planos respectivamente parallelos a dois eixos que se cortam perpendicularmente; si estes eixos são iguaes, o parallelepipedo rectangulo toma o nome de *cubo.* O cubo é pois limitado por quadrados em vez de rectangulos. Os parallelepipedos têm por conseguinte seis faces, oito angulos triedros e doze arestas.

Entre taes hexaedros é sobretudo notavel o que se chama *cubo*, porque, em virtude de sua regularidade foi elle adoptado para *modulo* das medidas dos volumes.

Emfim, pode-se vêr claramente a connexidade existente entre o prisma propriamente dito e o parallelepipedo, traçando neste as diagonaes correspondentes a duas faces oppostas e conduzindo por ellas um plano: este plano diagonal dividirá o parallelepipedo em dois prismas triangulares symetricos. Veremos que por sua vez cada um destes prismas triangulares pode ser decomposto em três pyramides, tendo duas um mesmo vertice que o prisma, e se achando a terceira em posição inversa sobre uma das bases delle; de sorte que os polyedros podem ser decompostos em *primas* ou em *pyramides.* O *prisma* e a *pyramide* devem por isso ser estudados especialmente, e delles nos occuparemos no § seguinte.

§ 12.°

Theoria da igualdade e similhança dos polyedros

141 — Igualdade dos polyedros. E' evidente que a igualdade de dois polyedros importa na de seus elementos, isto é, na igualdade das faces, bem como na dos angulos respectivos formados por ellas. Vejamos si essas condições de igualdade podem ser reduzidas ao minimo, de sorte que preenchidas umas, resultem as outras como consequencia das primeiras. Para isto examinemos a principio as condições de igualdade dos corpos polyedricos mais simples, isto é, dos tetraedros, que se obtêm, como vimos, cortando as três faces de um angulo triedro por um plano não passando pelo vertice.

I. Comquanto um tetraedro possua quatro faces e quatro angulos triedros, não é necessario que se reconheça a igualdade respectiva destes oito elementos para concluir-se que são iguaes dois typos desta especie de polyedros. Basta verificar si a metade daquellas condições é preenchida, para que se possa reconhecer si o mesmo acontece com as outras e, portanto, constatar a igualdade de dois tetraedros.

E' facil de ver, com effeito, que dois tetraedros são iguaes:

1.° *Quando têm uma face igual, adjacente a três diedros respectivamente iguaes.*

2.° *Quando têm um diedro igual, comprehendido entre duas faces respectivamente iguaes e similhantemente dispostas.*

IPSICLE

3.° *Quando têm três faces respectivamente iguaes, e similhantemente dispostas.*

1.° *Caso.* — Sejam os dois tetraedros A B C D e A′ B′ C′ D′ (Fig. 113), tendo a face B C D = B′ C′ D′, e os diedros B C = = B′ C′, C D = C′ D′ e B D = B′ D′. Ajustemos as duas figuras de modo que a face B C D coincida com a sua igual B′ C′ D′. Como os diedros B C e B′ C′ são iguaes, a face A B C cairá sobre A′ B′ C′; do mesmo modo, por ser B D = B′ D′ e C D = = C′ D′, as outras duas faces A C D e A B D cairão sobre as faces A′ C′ D′ e A′ B′ D′. O ponto A tendo de existir ao mesmo tempo nas três faces do tetraedro, se achará necessariamente na sua intersecção A′. Então todos os vertices dos dois tetraedros coincidem, e portanto elles são iguaes.

2.° *Caso.* — Consideremos os mesmos tetraedros (Fig. 113), e supponhamos que as faces B A C = B′ A′ C′, B A D = B′ A′ D′, e que o diedro comprehendido A B = A′ B′. Sobrepondo as duas figuras de modo que a face B A C coincida com a sua igual B′ A′ C′, é evidente que sendo o diedro A B = A′ B′, a face B A D cairá sobre B′ A′ D′; e como ellas são iguaes, os lados A C e A D achar-se-hão confundidos com A′ C′ e A′ D′; de sorte que a face C A D coincidirá com C′ A′ D′. Então todos os vertices dos dois tetraedros coincidem, e portanto elles são iguaes.

3.° *Caso.* — Sejam os tetraedros A B C D e A′ B′ C′ D (Fig. 113).. Suppondo as faces A B C = A′ B′ C′, A B D = = A′ B′ D′ e A C D = A′ C′ D′, sabemos que são iguaes os dois triedros A e A′; e como vimos que a faces iguaes, em dois triedros, ficam oppostos angulos diedros respectivamente iguaes é evidente que fazendo coincidir a face A B C com a sua igual A′ B′ C′, as outras faces iguaes coincidirão tambem, por serem igualmente inclinadas sobre estas.

Estes casos de igualdade acham-se de accordo com a formação do tetraedro. Porque este corpo resultando da intersecção das três arestas de um angulo triedro por um plano não passando pelo vertice, vê-se que neste ultimo caso o trie-

dro é limitado pelo plano que corta suas faces quando se suppõe que estas são dadas, *bastando aliás para isto que as três arestas correspondentes sejam conhecidas*. No primeiro caso é, ao contrario, o plano secante que é dado com as inclinações que devem ter sobre elle as faces do angulo triedro. O caso intermediario liga os dois extremos, nos levando a conhecer um outro angulo triedro dos tetraedros considerados. Com effeito, suppondo um angulo diedro igual, $AB = A'B'$ (Fig. 113), comprehendido entre duas faces respectivamente iguaes, $ABC = A'B'C'$ e $ABD = A'B'D'$, os dois triedros A e A' serão necessariamente iguaes; pelo mesmo motivo serão iguaes os angulos triedros B e B'. E como estes têm a aresta commum $AB = A'B'$, pode-se dizer que *dois tetraedros são iguaes quando têm dois triedros respectivamente iguaes, e igual uma aresta commum.*

Assim, pois, um tetraedro fica determinado nos casos seguintes: Quando são dadas três faces, ou quando são dadas uma face e os três angulos diedros adjacentes; quando são dadas duas faces e o diedro comprehendido, ou quando são dados dois triedros e uma aresta commum.

Estas propriedades dos tetraedros permittem salientar a importancia destas figuras na medida indirecta dos comprimentos rectilineos. Assim como se determina a posição de um ponto sobre um plano ligando-o por um triangulo a dois outros pontos dados sobre este plano, assim tambem se fixa a posição de um ponto qualquer fora de um plano, ligando-o por um tetraedro a três outros pontos dados. E dahi resulta a possibilidade de determinar a posição de dois, três ou mais pontos, desde que se generalize este processo, considerando-os successivamente como vertices de tetraedros tendo todos uma base commum. Uma marcha similhante é a que se segue de ordinario na determinação dos elementos de um polyedro qualquer.

II. Todo polyedro pode, com effeito, ser decomposto em tetraedros, e isto se faz geralmente por dois modos analo-

gos aos que indicámos para dividir um polygono em triangulos.

O primeiro modo consiste em tomar um ponto no interior do polyedro, e imaginar planos passando por este ponto e por cada uma das arestas. Estes planos dividirão o polyedro em tantas pyramides quantas são as faces; e, segundo forem estas triangulares, quadrangulares, pentagonaes, etc..., serão triangulares, quadrangulares, pentagonaes etc., as pyramides assim obtidas (Fig. 114). Mas, dividindo em triangulos os quadrilateros, pentagonos, etc..., que formam as faces do polyedro obtido, cada uma das pyramides pode decompor-se, por sua vez, em pyramides triangulares ou tetraedros. O polyedro considerado compõe-se então de tantos tetraedros quantos triangulos existem na sua superficie, sendo estes triangulos as bases dos mesmos tetraedros, e tendo todos um vertice commum.

O segundo modo, que é o mais usual, consiste em escolher um vertice do polyedro, e dividir em triangulos todas as suas faces, fazendo passar planos pelas rectas assignaladas. Com effeito, conduzindo planos pelo primeiro vertice e por cada um dos triangulos, ficará o polyedro dividido em tetraedros, tendo todos o vertice escolhido, e sendo suas bases os triangulos em que se dividiram as faces (Fig. 115). E' evidente que ha toda a vantagem em tomar para vertice commum dos tetraedros, aquelle em que concorre o maior numero de faces do polyedro.

Similhante decomposição nos deixa ver que *dois polyedros são iguaes quando se compõem de igual numero de tetraedros iguaes um a um, e similhantemente dispostos.* Com effeito, sendo os tetraedros iguaes e adjacentes uns aos outros na mesma ordem, basta fazer coincidir um delles com o seu igual, para que successivamente todos os outros coincidam cada um com o que lhe corresponde; destarte todos os vertices e faces de um polyedro se ajustam sobre os do outro, pelo que são esses polyedros iguaes em todas as suas partes.

Reciprocamente, pode-se definir *dois polyedros iguaes como sendo aquelles que se dividem em igual numero de tetraedros respectivamente iguaes, e similhantemente dispostos.* Porque estes tetraedros sendo iguaes, o serão tambem os respectivos elementos entre os quaes se acham as faces e os angulos diedros dos dois polyedros considerados; logo estes serão iguaes.

142 — Pyramides quaesquer; prismas, suas propriedades. O ultimo dos casos de igualdade acima indicados, para as pyramides triangulares ou tetraedros, pode ser estendido a *pyramides quaesquer* e mesmo aos *prismas*, visto como a diversidade de uns e outros se acha essencialmente reduzida á de suas bases. E' facil de ver, com effeito, que a respeito desses dois typos intermediarios entre a superficie plana e os polyedros mais complexos, *a perfeita igualdade exige apenas a de três faces respectivamente reunidas em torno de um dos vertices da base polygonal.*

I. Effectivamente, notemos a principio que num prisma qualquer (Fig. 116) existindo todos os vertices nas duas bases, um destes, A, se acha necessariamente entre as faces suppostas iguaes. Isto posto, suppondo sejam iguaes as faces dos angulos triedros A e A′, resulta que serão iguaes os angulos diedros cujas arestas concorrem nestes vertices. Collocando, pois, a base A B C D E do prisma considerado sobre a sua igual A′ B′ C′ D′ E′, coincidirão tambem os diedros A B, A E e A F com os seus iguaes A′ B′, A′ E′ e A′ F′; e assim coincidirão os pontos B, E e F com B′, E′ e F′. As outras arestas sendo iguaes, ajustar-se-hão tambem, de sorte que coincidem todas as arestas e todas as faces, sendo portanto iguaes os dois prismas.

II. O mesmo raciocinio applica-se ao caso de duas pyramides quaesquer, porque nestas sómente os angulos da base são de ordinario triedros (Fig. 117).

E assim podemos concluir que *dois prismas ou duas pyramides são iguaes quando as faces que compõem um angulo triedro em cada um delles são iguaes respectivamente.* Si os pris-

mas ou as pyramides forem rectos, é evidente que *serão iguaes desde que tenham as bases iguaes, bem como suas alturas.* Porque todas as faces lateraes são então rectangulos iguaes um a um, no caso dos prismas; e triangulos iguaes no caso das pyramides; de sorte que os dois triedros A e A' terão as faces respectivamente iguaes e, portanto, serão iguaes.

Nestas condições, *um prisma ou uma pyramide fica determinado quando se conhece sua base, e uma das arestas lateraes em grandeza e direcção.*

Dahi resulta tambem que *dois prismas rectos são iguaes quando têm igual base e igual altura.* Porque então os rectangulos lateraes que formam as faces são todos iguaes respectivamente nos dois prismas; pelo que são iguaes as faces que compõem qualquer dos angulos triedros.

E como vimos que um parallelepipedo qualquer pode sempre ser decomposto em dois prismas (Fig. 118), concluimos demais que *todo parallelepipedo rectangulo se divide em dois prismas triangulares rectos e iguaes.*

III. O parallelepipedo é o mais importante dos prismas pelas suas numerosas applicações. A uniformidade do parallelepipedo rectangulo, e sobretudo do cubo, permitte determinar com facilidade os seus elementos, uns por meio dos outros. Assim, por exemplo, para obter o comprimento de uma diagonal conhecendo três das arestas que ella liga, basta attender que *em todo parallelepipedo rectangulo o quadrado de uma diagonal é igual á somma dos quadrados de três arestas contiguas.*

Com effeito, consideremos o parallelepipedo rectangulo ABCDA'B'C'D' (Fig. 119), e tracemos a sua diagonal DB', partindo do ponto de encontro das três arestas contiguas DA, DD' e DC, para o vertice opposto B'; traçando D'B', diagonal da base, formamos os triangulos rectangulos DD'B' e D'A'B', que nos dão respectivamente

$$\overline{DB'}^2 = \overline{DD'}^2 + \overline{D'B'}^2$$

e $$\overline{D'B'}^2 = \overline{D'A'}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{D'A'}^2 + \overline{D'C'}^2;$$

e finalmente por substituição:

$$\overline{DB'}^2 = \overline{DD'}^2 + \overline{D'A'}^2 + \overline{D'C'}^2.$$

Esta relação nos deixa vêr que as diagonaes de um parallelepipedo rectangulo são todas iguaes, e que no caso do *cubo, o quadrado de uma diagonal equivale ao triplo do quadrado de uma das arestas.*

Tratando-se das *diagonaes de um parallelepipedo qualquer* (Fig. 120), *é facil de verificar que se cortam em seu meio.* Porque tirando um plano por duas arestas oppostas, já vimos que se obtem um parallelogrammo, cujas diagonaes se cortam ao meio. E como duas outras diagonaes quaesquer se cortam tambem em seus meios, segue-se que todas as diagonaes passam por um mesmo ponto, que é o meio de cada uma dellas.

O ponto commum ás quatro diagonaes de um parallelepipedo chama-se *centro* desta figura, porque é o meio commum de todas as rectas que se podem tirar no parallelepipedo por este ponto. Com effeito, supponhamos a recta KL, passando pelo ponto O, e limitada na superficie do parallelepipedo (Fig. 120). O plano determinado por esta recta e pela diagonal AF, corta as duas faces oppostas ABCD e EFGH, segundo as parallelas AK e FL; assim pois os dois triangulos AOK e FOL são iguaes, donde resulta que OK = OL.

Relativamente ás pyramides é escusado dizer que *se tornam iguaes quando têm a base e a altura respectivamente iguaes.* Pode-se aliás exprimir a grandeza da altura por meio das arestas lateraes. Para isto basta attender que *toda secção abcde* (Fig. 121), *feita em qualquer pyramide por um plano parallelo á base, é uma figura similhante á mesma base e, por conseguinte, corta proporcionalmente as arestas e a altura da pyramide.*

Com effeito, sendo o plano *abcde* parallelo a ABCDE, é *ab* parallelo a AB, *bc* a BC, etc...; logo são iguaes os angulos *eab* e EAB, *abc* e ABC, etc...

Demais o $\triangle SAB \backsim Sab$ (12 a)
e portanto

$$SA : Sa :: AB : ab :: SB : Sb;$$

assim tambem, por ser

$$\triangle SBC \backsim Sbc,$$

teremos

$$SB : Sb :: BC : bc :: SC : Sc,$$

e ainda sendo

$$\triangle SCD \backsim Scd,$$

virá tambem

$$SC : Sc :: CD : cd :: SD : Sd \text{ etc., etc...}$$

Destas series de razões deduz-se, attendendo ás que são communs:

1.º $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd ::$ etc...;

logo os dois polygonos ABCDE e *abcde* são similhantes, pois que tambem são iguaes os seus angulos.

2.º A proporção continua

$$SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc \text{ etc...},$$

nos mostra que as rectas SA, SB, SC etc., ficaram cortadas proporcionalmente.

3.º Finalmente imaginando um plano por uma aresta SB e pela altura SO, serão tambem similhantes os triangulos SOB e Sob, donde $SO : So :: SB : Sb$; o que verifica a ul-

---

(12 a) Para designar a similhança adoptamos o signal $\backsim$ empregado por Vincent no seu *Tratado de Geometria*, e vulgarizado entre nós pelo Sr. C. B. Ottoni nos seus *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea*.

tima parte do enunciado, relativamente á perpendicular baixada do vertice sobre a base.

Por meio do que precede, torna-se possivel *determinar a altura* S O *de uma pyramide, quando se conhece a altura* o O *de um tronco de bases parallelas* $abcde$ ABCDE (Fig. 121), e vice-versa. Para isto basta considerar que, si prolongassemos a altura e as arestas do tronco até o vertice S da pyramide, teriamos as proporções

$$SO:So::SA:Sa, \text{ e } AB:ab::SA:Sa;$$

das quaes se tira

$$SO-So:SO::SA-Sa:SA,$$

e

$$AB-ab:AB::SA-Sa:SA;$$

donde se deduz, attendendo á razão commum

$$SO-So:SO::AB-ab:AB,$$

ou

$$Oo:SO::AB-ab:AB$$

donde se conclue que $SO=\frac{AB\times Oo}{AB-ab}$ e $Oo=\frac{SO(AB-ab)}{AB}$.

143—Seria inutil insistir mais sobre a igualdade dos polyedros. Apenas accrescentaremos, por analogia com o que foi dito sobre os polygonos, uma nota importante, que resulta da circunstancia de ficar um polyedro qualquer determinado, quando são conhecidos os vertices de três de seus angulos polyedros, e suas distancias a todos os outros. Daqui se segue, com effeito, que designando por N o numero de vertices do polyedro, sua determinação completa depende das 3 (N—3) linhas tiradas para os vertices do triangulo tomado por base, e dos três lados deste triangulo, o que faz ao todo 3 (N—3) + 3= =3 (N — 2) dados. Observemos, todavia, conforme Legendre o reconheceu, que o numero desses dados pode ser muito menor que 3 N — 6, como se vê por este theorema:

«O numero dos elementos necessarios para determinar um polyedro, cujo numero de faces, numero de lados de cada face e a sua disposição em torno de cada vertice são dados, é igual ao numero das arestas.»

Com effeito, consideremos os vertices V do polyedro como um systema de V pontos, e procuremos determinar as posições relativas destes pontos. Como um tetraedro fica determinado pelo conhecimento das suas seis arestas, a posição de um ponto no espaço fica determinada pelo conhecimento de suas distancias a três pontos dados, no plano dos quaes não existe o ponto considerado.

Para determinar três pontos são precisos três elementos; para determinar os outros $V-3$ são necessarias as $3(V-3)$ distancias aos três primeiros. A determinação relativa de um systema de V pontos exige, pois, ao todo $3+3(V-3)=$ $=3(V-2)$ dados.

Mas, para um polyedro cujo numero de faces e numero de lados de cada face são conhecidos, este numero de condições é excessivo.

Effectivamente seja n o numero dos vertices situados numa face. Determinando o plano que passa por três, a determinação de cada um dos outros pontos exige sómente duas condições, isto é, as distancias a dois dos precedentes: assim, a condição de n pontos estarem no mesmo plano diminue de $n-3$ o numero de condições. Chega-se á mesma conclusão para as outras faces. O numero N de elementos necesarios será portanto

$$N=3(V-2)-[(n-3)+(n'-3)+(n''-3)+\ldots]$$

ou

$$\begin{aligned} N&=3(V-2)-[(n-n'+n''+\ldots)-(3+3+3+\ldots)]=\\ &=3(V-2)-(2A-3F)=\\ &=3(V-2)-2A+3F= \end{aligned}$$

$= 3(V + F - 2) - 2A.$

Mas $V + F - 2 = A$ (136);

por conseguinte $N = 3A - 2A = A$ (12 b)

Tal é o theorema devido a Legendre, que afinal pode ser considerado como uma generalização do de Euler (136).

A impossibilidade pratica que existe, quasi sempre, de constituir-se um polyedro igual a outro, a fim de determinar os elementos desconhecidos daquelle por meio deste, levou naturalmente o espirito humano a proceder de modo analogo ao caso polygonal; isto é, a construir um polyedro, não igual, mas apenas similhante ao considerado.

144. INSTITUIÇÃO DA SIMILHANÇA DOS POLYEDROS—Por analogia com o caso dos polygonos, podemos dizer que *polyedros similhantes são aqueles que têm as faces respectivamente similhantes, e os angulos polyedros respectivamente iguaes.*

I. Desta definição resulta que *em dois polyedros similhantes*:

1.º Os *diedros homologos são iguaes*, porque estes diedros pertencem a angulos polyedros que podem coincidir;

2.º *Todas as dimensões homologas estão na mesma razão:* porque as arestas homologas pertencem a polygonos similhantes ligados entre si por dimensões communs, e as outras linhas homologas podem ser ligadas ás arestas homologas por triangulos similhantes.

A similhança dos polyedros, do mesmo modo que a igualdade, pode ser reduzida á dos tetraedros componentes. A similhança destes consistindo na igualdade dos angulos triedros e na similhança das faces, pode-se dizer em ultima analyse que *tetraedros similhantes são os que têm os diedros respectivamente iguaes, e similhantemente dispostos.* Porque é facil verificar que *sendo os diedros iguaes e similhantemente*

(12 b) Legendre—Elements de Géométrie—note VIII

dispostos, as faces dos tetraedros serão respectivamente similhantes.

Com effeito, sejam A B C D e A′B′C′D′ (Fig. 122) dois tetraedros que têm os diedros respectivamente iguaes e similhantemente dispostos. Os triedros A e A′ são iguaes, por terem os seus três diedros respectivamente iguaes; então os angulos rectilineos B A C e B′A′C′ são iguaes. Os triedros B e B′ são tambem iguais por terem os seus três diedros respectivamente iguaes; logo os angulos rectilineos A B C e A′B′C′ são iguaes. Os dois triangulos A B C e A′B′C′ são, pois, similhantes, por terem dois angulos iguaes. Demonstra-se do mesmo modo a similhança das outras faces; portanto os dois tetraedros, tendo os diedros iguaes, têm as faces similhantes.

Conquanto a similhança dos tetraedros importe na igualdade respectiva de todos os diedros, e na similhança de todas as faces, ella pode ser verificada desde que seja preenchida uma parte destas condições. E' assim que *dois tetraedros são similhantes:* 1.° *Quando têm uma face similhante, adjacente a três diedros respectivamente iguaes;* 2.° *Quando têm um diedro igual, comprehendido entre duas faces respectivamente similhantes:* 3.° *Quando têm três faces respectivamente similhantes e similhantemente dispostas.*

1.° Sejam A B C D e A′B′C′D′ (Fig. 122) os dois tetraedros que têm a face B C D similhante a B′C′D′, e os diedros B C = B′C′, B D = B′D′ e C D = C′D′.

Como as faces B C D e B′C′D′ são suppostas similhantes, o angulo D B C = ∧ D′B′C′. Então os triedros B e B′ são iguaes, por terem a face D B C = D′B′C′, e os diedros adjacentes respectivamente iguaes; logo os diedros A B e A′B′ são iguaes. Portanto, os dois tetraedros tendo todos os diedros iguaes, são similhantes por definição;

2.° Supponhamos naquelles tetraedros (Fig. 122) que o diedro A B = A′B′, e as faces A B C e A B D respectivamente similhantes a A′B′C′ e A′B′D′.

Como as duas faces são similhantes, será o $\wedge BAC =$ $= \wedge B'A'C'$ e $\wedge BAD = \wedge B'A'D'$; logo os triedros A e A' são iguaes por terem um diedro igual, comprehendido entre faces respectivamente iguaes; então será o diedro $AC = A'C'$. Os triedros B e B' são tambem iguaes, por terem um diedro $AB = A'B'$, compreendido entre as faces iguaes $ABC =$ $- A'B'C'$ e $ABD = A'B'D'$; logo os diedros BC e B'C' são iguaes. Os dois tetraedros tendo as faces ABC e A'B'C' similhantes, e os três diedros adjacentes iguaes, são pois similhantes.

Como consequencia do que precede pode-se dizer que *dois tetraedros são similhantes quando têm dois triedros iguaes, e similhantemente dispostos.*

Com effeito, supponhamos iguaes os triedros A e A', B e B' (Fig. 122).

Da igualdade destes triedros conclue-se que são iguaes os angulos BAC e B'A'C', ABC e A'B'C'; logo a face BAC é similhante a B'A'C'; do mesmo modo se prova a similhança das faces BAD e B'A'D'.

Portanto os dois tetraedros têm o diedro $AB = A'B'$, e similhantes as faces adjacentes; logo são similhantes;

3.º Supponhamos que as faces ABC e A'B'C', ABD e A'B'D', CAD e C'A'D' (Fig. 122) sejam respectivamente similhantes.

Os triedros A e A' são então iguaes, porque têm as três faces respectivamente iguaes, donde resulta que $\wedge BAC =$ $\wedge B'A'C'$, $\wedge BAD = \wedge B'A'D'$ e $\wedge CAD = C'A'D'$, por serem angulos de triangulos similhantes; logo será o diedro $AB = A'B'$. Os dois tetraedros têm, pois, um diedro igual, comprehendido entre duas faces respectivamente similhantes, e similhantemente dispostas; portanto são similhantes.

II. As propriedades precedentes permittem reconhecer os caracteres de similhança de polyedros quaesquer. Porque decompondo-se cada polyedro em tetraedros, conforme vimos

(142), a similhança dos tetraedros deve servir de base á similhança das figuras mais complexas.

Effectivamente, é facil verificar que *dois polyedros sendo compostos do mesmo numero de tetraedros similhantes, e similhantemente dispostos, são similhantes.* Com effeito, tudo se reduz a provar que todas as faces de um dos polyedros considerados são iguaes ás do outro, similhantemente dispostas, e que formam angulos diedros iguaes. Ora, divididos os dois polyedros em tetraedros, reconhece-se immediatamente que: 1.º *As faces homologas dos polyedros considerados ou são faces homologas de tetraedros similhantes, ou aggregados de faces dos mesmos tetraedros;* 2.º *Os angulos diedros homologos ou pertencem a tetraedros similhantes, ou são sommas de diedros homologos dos mesmos tetraedros;* 3.º *O mesmo se diz dos angulos polyedros homologos.*

Reciprocamente, *quando dois polyedros são similhantes, podem ser repartidos em um mesmo numero de tetraedros similhantes, e similhantemente dispostos.* Porque os polyedros considerados sendo suppostos similhantes, suas faces são similhantes, e dispostas do mesmo modo.

Divididos em tetraedros pelo methodo que foi indicado, é facil provar a similhança de todos esses tetraedros. Com effeito, é evidente que nas faces similhantes dos polyedros propostos tendo ajuntado por diagonaes os angulos homologos, formaremos sobre estas faces o mesmo numero de triangulos similhantes e similhantemente dispostos, de sorte que os tetraedros obtidos terão todos as suas bases similhantes, e dispostas do mesmo modo.

Estes tetraedros podem ser divididos em duas classes: uns tendo duas faces communs com os polyedros, e comprehendendo entre si angulos diedros iguaes, por pertencerem aos polyedros; portanto serão similhantes. Os tetraedros da segunda classe são compostos de faces homologas dos tetraedros da primeira, e comprehendem angulos formados pela differença de angulos iguaes desses tetraedros, e de angulos iguaes

dos polyedros; por conseguinte esses tetraedros são tambem similhantes.

III. Da propriedade precedente resulta que *as arestas homologas, as diagonaes homologas*, etc., *e em geral quaesquer linhas homologas em dois polyedros similhantes, são linhas proporcionaes*. Porque estas rectas são arestas homologas de tetraedros similhantes, adjacentes uns aos outros; o que permitte ligar em uma série de razões iguaes as proporções existentes entre as arestas de cada par de tetraedros similhantes, e portanto entre quaesquer outras linhas homologas que se achem sobre as faces de dois polyedros.

145 — CARACTER INHERENTE Á SIMILHANÇA DE PYRAMIDES QUAESQUER, BEM COMO Á SIMILHANÇA DOS PRISMAS. OUTRAS PROPRIEDADES DESTES CORPOS POLYEDRICOS. Conquanto as formas pyramidaes, bem como as prismaticas, se achem todas comprehendidas nas propriedades acima, a similhança de umas ou outras pode ser caracterizada mais simplesmente, attendendo que a desigualdade entre ellas se reduz essencialmente á de suas bases. A respeito destes corpos é facil verificar que *a perfeita similhança exige apenas a de trés faces respectivamente reunidas em um dos vertices da base polygonal.*

Com effeito, sejam S e S′ duas pyramides similhantes (Fig. 123), que têm as bases A B C D E e A′ B′ C′ D′ E′ similhantes, e as faces S A B e S B C respectivamente similhantes ás faces S′ A′ B′ e S′ B′ C′.

Tiremos os planos diagonaes que passarem por S A e S′ A′, os quaes decompõem as bases em triangulos respectivamente similhantes. Os tetraedros S A B C e S′ A′ B′ C′ são similhantes por terem as três faces similhantes e similhantemente dispostas; isto é: S A B $\backsim$ S′ A′ B′, S B C $\backsim$ S′ B′ C′ e A B C $\backsim$ A′ B′ C′. Da similhança desses tetraedros conclue-se a similhança das faces S A C e S′ A′ C′, e a igualdade respectiva dos diedros B C e A S a B′ C′ e A′ S′; e portanto os seus supplementos D C A S e D′ C′ A′ S′. Assim, pois, os tetraedros S A D C e S′ A′ D′ C′ são similhantes, por terem um diedro igual com-

prehendido entre duas faces similhantes, e dispostas do mesmo modo; isto é, $SAC \backsim S'A'C'$ e $ACD \backsim A'C'D'$

Do mesmo modo se prova a similhança dos outros tetraedros. Portanto, as duas pyramides sendo compostas do mesmo numero de tetraedros similhantes, e similhantemente dispostos, são similhantes.

Por um raciocinio analogo seria facil demonstrar a similhança de dois prismas nas mesmas condições.

I. Da propriedade precedente deduz-se immediatamente que *duas pyramides ou dois prismas são similhantes quando têm a base e uma face respectivamente similhantes, e igual o angulo diedro comprehendido.*

Com effeito, sejam S e S' duas pyramides (Fig. 123), que têm as bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ similhantes, assim como as faces SAB e $S'A'B'$; e iguaes os diedros AB e $A'B'$. Tiremos os planos diagonaes pelas arestas SA e $S'A'$, que decompõem as bases em triangulos similhantes.

Os tetraedros $SABC$ e $S'A'B'C'$ são similhantes, por terem duas faces similhantes, isto é, $SAB \backsim S'A'B'$, $ABC \backsim A'B'C'$, e iguaes os diedros comprehendidos AB e $A'B'$. Dahi resulta que a face SBC é similhante a $S'B'C'$. Portanto as duas pyramides, tendo as bases e duas faces contiguas respectivamente similhantes, são similhantes.

Por um raciocinio analogo seria facil demonstrar a similhança de dois prismas nas mesmas condições.

II. Si cortassemos a pyramide $SABCDE$ por um plano $abcde$ (Fig. 121) parallelo á base, teriamos evidentemente uma pyramide $Sabcde$, similhante á pyramide inteira; porque é facil de reconhecer que todas as faces de uma seriam similhantes ás da outra, e similhantemente dispostas. Assim, pois, três dessas faces respectivamente reunidas em um dos vertices da base da primeira pyramide serão similhantes ás suas homologas na segunda. É visivel que as duas pyramides $SABCDE$ e $Sabcde$ seriam iguaes, se uma das rectas SA da primeira fosse igual á sua correspondente Sa da segunda.

Porque supondo as faces de ambas similhantes ás de uma outra pyramide $S'A'B'C'D'E'$, serão todas similhantes entre si, e devem por conseguinte vir a ser iguaes quando tiverem uma aresta commum; visto como sabemos que triangulos equiangulos são iguaes quando têm um lado igual. Demais, os angulos triedros de cada uma destas pyramides, sendo então formados de angulos rectilineos iguaes, terão os seus angulos diedros iguaes: ellas serão, portanto, iguaes.

III. Emfim, da similhança das faces das pyramides $SABCDE$ e $Sabcde$ (Fig. 121), segue-se que as arestas destas pyramides são proporcionaes entre si; e tambem as perpendiculares SO e So, baixadas do vertice sobre as bases. Porque, comparando as faces triangulares homologas SAB e Sab, SBC e Sbc, etc..., teremos estas séries de razões iguaes

$$SA:Sa::AB:ab::SB:Sb$$
$$SB:Sb::BC:bc::SC:Sc$$

das quaes se tira esta

$$SA:Sa::SB:Sb::SC:Sc \text{ etc.}$$
$$::AB:ab::BC:bc.., \text{ etc.}$$

Demais, o parallelismo dos planos $abcde$ e $ABCDE$ nos dá tambem

$$SA:Sa::SO:So$$

ou

$$SA:SA'::SO:SO'$$

por termos supposto $S'A'=Sa$ e, portanto, $S'O'=So$,

Vê-se que a razão $SA:Sa$ liga esta ultima proporção com as precedentes, e teremos assim

$$SA:Sa::SB:Sb::SC:Sc::SO:So \text{ etc...}$$

Representando abreviadamente por l, l', e a, a', duas arestas lateraes e as alturas homologas das duas pyramides similhantes, é claro que a proporção

$$l : l' :: a : a'$$

permitte determinar qualquer desses comprimentos, quando três outros forem conhecidos.

146 — Leis complementares á similhança dos polyedros. Pode-se facilmente estender aos polyedros os dois theoremas geraes que foram indicados para completar a theoria da similhança dos polygonos. Relativamente ao primeiro, é facil reconhecer que *os vertices de dois polyedros similhantes podem ser determinados por tetraedros respectivamente similhantes, tendo em cada figura uma base commum.* Com effeito, os dois polyedros sendo similhantes os triangulos que compõem as faces do primeiro são evidentemente similhantes aos das faces do segundo, e como estas ficam igualmentes inclinadas umas em relação ás outras, resulta que decompondo os dois polyedros em tetraedros, serão estes similhantes, e similhantemente dispostos, conforme vimos acima

I. Reciprocamente, *dois polyedros serão similhantes quando juntando em cada um as extremidades de uma mesma base, em cada figura, a todos os seus vertices, os tetraedros assim formados forem respectivamente similhantes e similhantemente dispostos.* Porque esses tetraedros sendo similhantes, têm respectivamente os diedros iguaes e as faces similhantes, tornando-se, pois, evidente que os triangulos que compõem as faces do primeiro polyedro são similhantes áquelles que formam as faces do segundo; sendo umas e outras igualmente inclinadas nas duas figuras. Logo, os dois polyedros são similhantes por terem angulos diedros iguaes, formados respectivamente por faces similhantes, e dispostas do mesmo modo.

II. Uma equivalente extensão torna-se facilmente apreciavel para o segundo theorema, quando os dois polyedros são

collocados convenientemente. De sorte que, ainda aqui, é mister que se faça intervir condições de posição, para apreciar um attributo puramente relativo á forma. Pode-se dizer, com effeito, que *dois polyedros similhantes sendo collocados em situação parallela, as linhas de junção dos vertices homologos concorrem todas num mesmo ponto, cujas distancias respectivas a dois quaesquer desses vertices offerecem então a mesma proporcionalidade que vimos existir no caso polygonal.* Porque os dois polyedros ficam assim comprehendidos numa serie de pyramides que são cortadas por planos parallelos ás respectivas bases; e já vimos que as arestas lateraes ficam então divididas proporcionalmente.

III. Reciprocamente, *si de um ponto qualquer, dentro ou fora do polyedro, se tiram raios vectores para todos os seus vertices, o lugar geometrico dos pontos de divisão desses raios vectores em partes proporcionaes será um segundo polyedro similhante ao primeiro, e similhantemente collocado em relação ao ponto escolhido.*

Porque as faces do segundo polyedro serão evidentemente parallelas e similhantes ás do primeiro, os angulos diedros serão iguaes um a um; e portanto os angulos polyedros. De sorte que todas as arestas e linhas correspondentes serão proporcionaes nas duas figuras.

Si a primeira figura fôr substituida por uma superficie curva, a segunda será tambem uma superficie curva similhante á primeira e disposta do mesmo modo.

Notemos, emfim, que si nas duas superficies curvas tirassemos uma serie de planos tangentes aos pontos homologos (as intersecções dos raios vectores, por exemplo) estes planos seriam respectivamente parallelos; e dest'arte seriam tambem similhantes as curvas traçadas entre estes pontos nas duas superficies, etc., etc.

Vê-se, portanto, a aptidão espontanea desta segunda lei complementar em ser estendida directamente ás superficies curvas, para ahi se verificar ou se construir a similhança.

A primeira lei comporta tambem uma generalização analoga, bastando para isso que as duas superficies curvas possam ser decompostas em polyedros similhantes, dispostos do mesmo modo, e tendo todos uma base commum nas duas figuras.

150. — Emprego dos polyedros na classificação morphologica dos corpos crystallinos. — Entre os corpos mineraes existem alguns que têm a fórma de polyedros mais ou menos regulares ou symetricos, e que são conhecidos pela denominação generica de *crystaes*. Quando se aprecia, sob o ponto de vista geometrico, o numero algumas vezes consideravel de crystaes que uma mesma substancia mineral apresenta, nota-se ordinariamente que todos esses corpos polyedricos, embora differentes, têm entretanto um aspecto geral commum, que á primeira vista nos leva a grupal-os todos no que se chama um *systema crystallino*. Algumas vezes, por exemplo, os crystaes, si bem que variados, parecem quasi todos *cubicos;* e se chama *forma dominante* a configuração exterior que é assim commum a muitos crystaes.

A regularidade, mais ou menos perfeita, é muitas vezes substituida pela symetria. Haüy, o fundador da mineralogia moderna, chamou lei de symetria a um facto geral, que lhe servia para explicar a passagem de uma fórma crystallina a uma outra.

Esta relação pode ser enunciada do modo seguinte: *Num mesmo crystal, si existe modificação sobre uma parte qualquer, relativamente á forma dominante, observa-se a mesma modificação, e da mesma maneira, sobre todas as partes identicas, e as partas não identicas, si são modificadas, o são isoladamente ou differentemente.* Assim, por exemplo, quando todas as arestas de um *crystal* são iguaes, e além disto similhantemente dispostas, ou ellas ficam todas intactas, ou se modificam todas simultaneamente, e da mesma maneira, por truncaturas taes que as facetas similhantes formam sempre angulos iguaes com as faces adjacentes. Mas, si o crystal apresenta diversas especies de aresta, só pode haver uma modi-

ficação isolada ou então tantas modificações differentes quantas são as arestas.

As condições exigidas pela lei de symetria limitam successivamente o numero das modificações admissiveis, e, por conseguinte, o numero das fórmas differentes de um mesmo grupo ou *systema crystallino*.

Quando as modificações de um crystal são conformes á lei de symetria, dá-se-lhe o nome de *completo*, circunstancia que os mineralogistas têm designado pelo nome de *homoedria*.

Mas, si o *crystal* apenas offerece metade das modificações exigidas por aquella lei, isto é, si sómente apresenta a metade do numero de faces que poderia ter, é chamado neste caso *hemiedrico* ou *hemiedro*. As palavras *homoedria* e *hemiedria*, segundo Weiss que as adoptou, correspondem á idéa de que o mundo nos apresenta ora *crystaes completos*, ora sómente *meios crystaes*. Por uma consideração similhante, os allemães admittiram as expressões *tritaedria*, *tetartoedria*, etc, para qualificar systemas de *crystaes* que só tivessem o terço, o quarto, etc.., do numero de faces que offereceriam si fossem submettidos á lei de symetria. A hemiedria, a tritaedria, a tetartoedria, etc.., receberam o nome collectivo de *heteroed'ia*, e muitas vezes o de *dissymetria*.

Quando todas as faces do polyedro são polygonos da mesma especie, diz-se que o crystal tem forma simples, como por exemplo o *cubo*, o *rhomboedro*, etc... Ao contrario, chama-se polyedro complexo ou *composto*, aquelle cujas faces são polygonos dissimilhantes; e neste caso o crystal denomina-se *biforme*, *triforme*, etc.., segundo é terminado por duas, três, etc.., sortes de faces.

Emfim, muitos crystaes apresentam certas analogias de formas, taes que estas podem ser deduzidas umas das outras; de sorte que todos elles podem ser referidos a um typo unico, de que se suppõe derivarem todos os individuos, por via de decrescimento ou de quaesquer outras modificações. Admittem-se geralmente, seis typos cystallinos, caracterizados por

uma consideração geometrica, que é a disposição dos eixos principaes, que se suppõe existirem nos polyedros correspondentes.

Para chegar a esta systematização, reduz-se a principio todos os typos crystallinos á forma prismatica. Ora, um prisma admitte sempre três eixos principaes, e não necessita mais. Estes eixos podem ser rectangulares ou obliquos. Além disto, cada systema de eixos pode offerecer grandezas relativas, como se vê em seguida

Eixos principaes Rectangulares	1.º Os três eixos iguaes, 2.º Dois eixos iguaes, o terceiro desigual, 3.º Os três eixos desiguaes.
Eixos principaes Obliquos	1.º Os três eixos iguaes, 2.º Dois eixos iguaes, o terceiro desigual, 3.º Os três eixos desiguaes.

Tem-se assim ao todo seis disposições, dando lugar a seis typos ou systemas crystallinos differentes. Estes typos são: 1.º *O cubo*; 2.º *O prisma recto de base quadrada*. 3.º *O prisma recto de base rectangular ou rhomboïdal*; 4.º*O rhomboedro obliquo* (cujas faces são todas iguaes) 5.º *O rhomboedro obliquo de base rectangular ou rhomboïdal* (prisma obliquo symetrico) 6.º *O rhomboedro obliquo de base parallelogrammica obliquangulo* (prisma não symetrico).

Desde que, de conformidade com a lei de symetria, se modifica cada elemento essencial do polyedro fundamental e, si se repetem as modificações sobre todos os elementos identicos, tendo o cuidado de empregar todas as combinações possiveis de facetas modificadoras, obter-se-ha assim todas as fórmas que dependem de um mesmo typo, ou que pertencem a um mesmo systema crystallino. Num systema crystallino qualquer, as arestas, as faces e os angulos podem variar em nu-

mero e em posição; mas os eixos são suppostos invariaveis, e toda a mudança em sua disposição importa na mudança de systema.

Examinemos successivamente os seis typos crystallinos:

1.º *Typo crystallino.* A forma fundamental é o *cubo*, caracterizado por três eixos rectangulares e iguaes. De accordo com a lei de symetria, quando existe modificação sobre um dos elementos (arestas ou angulos triedros), ella deve reproduzir-se sobre todos os elementos identicos. Demais, essas modificações podem affectar posições differentes; porque as novas faces podem ser dispostas com inclinações iguaes ou desiguaes nos diversos sentidos, em relação ás faces que terminam nas arestas ou nos angulos sobre os quaes têm lugar as modificações. Dessas duas modificações resultam polyedros muito differentes: no primeiro caso os crystaes derivados são regulares; no segundo são simplesmente symetricos.

Quando as modificações têm lugar sobre os angulos triedros do cubo, obtem-se um outro polyedro tirando as pontas do cubo (Fig. 124). Si sendo prolongadas as facetas chegam a se tocar, duas a duas, ellas formarão com as faces P o *cubo-octaedro* (Fig. 125). Multiplicando mais o numero de facetas, ellas farão por fim desapparecer inteiramente as faces primitivas P, e, pela juncção completa de seus lados, acabarão por formar um outro polyedro (Fig. 126), que é o *octaedro regular*, cujos elementos são: 8 faces triangulares, equilateras e iguaes; 12 arestas iguaes; e 6 angulos polyedros iguaes.

Quando as modificações são feitas sobre as doze arestas do cubo, pode resultar o *cubo dodecaedro* (Fig. 127); mas, si as truncaturas *b* são sufficientemente prolongadas, as faces P desapparecerão, e têr-se-ha o *dodecaedro rhomboïdal*, ou *rhombo-dodecaedro* (Fig. 128) cujos elementos são: 12 faces rhomboidaes iguaes, 24 arestas iguaes e 14 angulos polyedros, dos quaes 6 quadruplos e 8 triplices.

Quando cada aresta do cubo é substituida por uma ou duas facetas *h* (Fig. 129), igualmente inclinadas de uma ponta

e da outra sobre as duas faces adjacentes P (o que constitue a truncatura em *bisel*), tem-se o *cubo-hexatetraedro*, que pela extensão das facetas modificadoras pode-se transformar no *hexatetraedro* (Fig. 130), cujos elementos são: 24 faces triangulares isosceles e iguaes; 36 arestas; 14 angulos polyedros, dos quaes 6 quadruplos e 8 sextuplos.

Imaginando que se tirem as pontas a 3 faces sobre cada um dos 8 angulos do cubo (Fig. 131); e prolongando ou aprofundando cada uma das facetas *t*, as faces P do cubo acabarão desapparecendo, e obter-se-ha o polyedro (Fig. 132) denominado *trapezoedro*, porque as suas faces têm todas a fórma de um trapezio, e cujos elementos são: 24 faces trapezoedaes, symetricas e iguaes; 48 arestas; 26 angulos, dos quaes 8 triplos e 18 quadruplos.

Si em lugar de ser feito sobre as faces, como no trapezoedro, o despontamento é realizado sobre as arestas, as facetas *e* (Fig. 133) são a principio rhomboedaes; nas suas intersecções mutuas conduzem a triangulos, e acabam por produzir um octotriedro (Fig. 134). Os elementos deste polyedro são 24 faces triangulares isosceles; 36 arestas; 14 angulos polyedros, dos quaes 6 octuplos e 8 triplices. (E' a este genero que pertence a crystallização do diamante).

Si cada um dos 8 angulos polyedros do cubo é substituido por 6 facetas (Fig. 135), e suppondo ainda estas facetas prolongadas até suas intersecções mutuas, ter-se-ha um polyedro terminado por 48 triangulos escalenos (Fig. 136), cujos elementos são: 48 triangulos escalenos e iguaes, já mencionados; 72 arestas; e 26 angulos polyedros, dos quaes 6 octuplos, 8 sextuplos e 12 quadruplos.

2.° *Typo crystallino*. A forma fundamental é o *prisma recto de base quadrada*, cujos caracteres são: os três eixos principaes rectangulares, sendo um desigual aos dois outros, que são iguaes entre si (Fig. 137). Pode experimentar três generos de modificações: sobre as arestas horizontaes, sobre as arestas verticaes, e sobre os angulos polyedros. As trun-

caturas sobre as arestas horizontaes produzem dois polyedros: o *prisma pyramidado* (Fig. 138), e o *octaedro de base quadrada* (Fig. 139), que é composto de duas pyramides rectas, apoiando-se sobre uma base quadrada commum.

As truncaturas sobre as arestas verticaes engendram o *prisma recto octogonal* (Fig. 140); e o prisma recto de base quadrada alterno, ou simplesmente o *prisma alterno* (Fig. 141) que não se deve confundir com o *prisma directo*, representado pela figura 137.

Emfim, as truncaturas sobre os angulos, produzem o *dodecaedro rhomboïdal symetrico;* que affecta ordinariamente a fórma intermediaria (Fig. 142), e a fórma definitiva (Fig. 143). Do bisellamento sobre os angulos do prisma recto de base quadrada, resulta o *dioctaedro* (Fig. 144), formado de duas pyramides com 8 faces, e oppostas pelá base.

3.º *Typo crystallino.* A forma fundamental é o *prisma recto de base rectangular*, caracterizado por três eixos principaes rectangulares e desiguaes (Fig. 145). Considerando successivamente as modificações que podem ser feitas sobre as arestas verticaes, sobre as arestas horizontaes, e sobre os angulos, obtem-se os polyedros seguintes: *prisma recto de base rhomboidal; prisma bisellado* (Fig. 146); *octaedro de base rectangular* (Fig. 147) e outras fórmas compostas.

4.º *Typo crystallino.* A fórma fundamental é o *rhomboedro*, caracterizado por três eixos principaes, obliquos e iguaes (Fig. 148).

As modificações feitas sobre este typo dão para fórmas principaes as seguintes: *o polyedro* representado na Fig. 149 e *o prisma hexagonal regular* (Figs. 149 e 150); *o prisma hexagonal pyramidado* (Fig. 151); *o bidodecaedro* (Fig. 152); *o rhomboedro baseado* (Fig. 153); *o escalenoedro agudo* (Fig. 154), etc...., além de fórmas compostas, que são mui numerosas neste systema.

5.º *Typo crystallino.* A fórma fundamental é o *prisma*

obliquo de base rhomboidal, caracterizado por dois eixos principaes iguaes entre si, e desiguaes ao terceiro (Fig. 155).

Este typo engendra *prismas obliquos de base rectangular, de base hexagonal e de base octogonal.* Estes prismas podem ser pyramidados, ou diversamente truncados, como se vê na figura (Fig. 156).

6.° *Typo crystallino.* A fórma fundamental é o *p'isma obliquo de base parallelogrammica obliquangula*, ou prisma obliquo não symetrico, caracterizado por três eixos principaes, obliquos e desiguaes (Fig. 157).

Este typo reproduz todas as fórmas prismaticas já conhecidas, desde que se mantem a condição de serem os três eixos principaes desiguaes entre si, e obliquos uns sobre os outros; condição que acarreta sempre a falta de symetria, como se vê, por exemplo, no *prisma hexagonal obliquo*, representado na figura 158. Este systema crystallino apresenta outras fórmas muito complexas, como acontece no systema precedante.

Até agora não se conhecem crystaes hemiedros pertencentes ao 5.° typo; mas é claro que neste, como nos outros systemas, só se tem em vista instituir grupos geraes, que comprehendam todas as formas imaginaveis. Para distinguir os individuos, torna-se muitas vezes necessario medir os angulos diedros dos corpos crystallinos, para o que são empregados *goniometros* especiaes. A importancia da medida desses angulos será comprehendida no § seguinte.

CAPITULO V

Theoria elementar do circulo e da medida dos angulos. Applicações

§ 13.°

Propriedades fundamentaes do circulo, e sua extensão ás outras curvas

151 — LIGAÇÃO DESTE § COM OS ANTERIORES. DEFINIÇÃO USUAL DO CIRCULO E NUMERO DE PONTOS QUE O DETERMINAM. Ligando a theoria da linha recta á do plano, o preambulo fundamental da *geometra* deve esboçar a theoria do circulo, donde resulta espontaneamente a medida dos angulos, a principio *rectilineos* e depois *diedros*. Sem esta terceira parte, a medida indirecta, dos comprimentos rectilineos, num só plano ou fóra delle não poderia ser effectuada, porquanto vimos que a determinação de taes linhas depende quasi sempre de suas mutuas inclinações.

E a medida desses angulos se torna tanto mais necessaria quanto maior é a precisão que se deseja obter, visto como se deve evitar o mais possivel a medida directa das linhas, sempre sujeita a erros inevitaveis.

E' principalmente á uniformidade que caracteriza o circulo, em virtude da *equidistancia do seu centro a todos os pontos de sua circumferencia*, que se deve a aptidão e efficacia desta curva plana para a medida dos angulos. Esta propriedade a liga profundamente ao conjunto do preambulo geometrico, posto que deva este concernir sobretudo á linha recta e ao plano.

LACROIS por Lacroix

Comparavel á linha recta quanto á sua uniformidade, o circulo liga-se tambem a ella por outro attributo commum, ainda que desigual. O caso da linha recta e do circulo são os unicos em que o numero de *pontos determinantes* não se reproduz em outras linhas. Sabemos que *dois pontos* são sufficientes para determinar uma recta em grandeza e posição. Quanto ao *circulo*, é facil de vêr que são necessarios *três pontos*.

A definição precedente mostra, com effeito, que são precisos no minimo três pontos para determinar a circunferencia da curva. Tomando dois pontos, apenas se determinaria o seu raio, e ficar-se-ia na incerteza sobre a posição do *centro*, que poderia ficar tanto num delles como no outro. Ao contrario, ligando três pontos por linhas rectas, e, levantando nos meios de dois dos lados do triangulo assim formado as respectivas perpendiculares, a intersecção dessas rectas indicará immediatamente a posição do centro da curva. A circunferencia desta passará, com effeito, por aquelles pontos, visto como ficam elles equidistantes de todos os pontos das duas perpendiculares, e por conseguinte de sua insersecção.

Representando estes pontos por A, B e C, é visivel que determinam a grandeza e posição da curva, visto como permittem conhecer o *centro O*, bem como sua distancia O A = O B = O C á circunferencia da curva (Fig. 159). Essa distancia constante é o que se chama *raio*, e as rectas taes como A A'; B B' e C C', formadas de dois raios, denominam-se *diametros* do circulo. Conhecendo a posição do centro e o comprimento do raio, se poderá traçar a curva com facilidade. Basta para isto empregar um instrumento conhecido pelo nome de *compasso*. Fixando uma das pontas no ponto central, bastará descrever com a outra uma rotação completa no mesmo plano, para obter a curva. Quando fôr dado o comprimento do diametro, basta determinar o meio desta recta para obter o centro da curva, e desde então, fixando ahi a ponta do compasso, proceder-se-ha como precedentemente. Emfim, si o raio

da curva fôr muito grande, poder-se-ha traçal-a no terreno ou no papel por meio de um cordel, ou de um instrumento especial chamado *cintel* (Fig. 160) (13 a). Entretanto, si forem dados quatro pontos em vez de três, veremos mais tarde que estas quatro condições permittem determinar uma infinidade de curvas differentes, algumas das quaes apreciaremos no curso destas lições. E verificaremos desde então que a multiplicidade das figuras cresce cada vez mais com a dos pontos necessarios á sua determiuação.

A linha recta póde ser considerada como o prolongamento rectilineo de dois pontos infinitamente vizinhos de uma curva; ou antes, como produzida pelo movimento de um ponto que segue constantemente a mesma direcção. A circunferencia do circulo póde ser olhada como produzida pelo movimento continuo de um ponto que muda uniformemente de direcção em torno de outro ponto fixo, situado no mesmo plano. A helice póde ser concebida como gerada por um ponto que tem ao mesmo tempo os dois movimentos precedentes, isto é, de *translação* e *rotação*. Este duplo movimento effectua-se então de modo uniforme sobre a mais simples das superficies não planas, isto é, sobre o cylindro circular, cujo raio deslisa ao longo do eixo, girando ao mesmo tempo em torno deste para descrever a curva (13 b). Todas as outras propriedades do cir-

---

(13 a) O cintel compõe-se de duas partes metalicas, uma das quaes é terminada em ponta e a outra num dispositivo para receber um lapis ou tira-linhas. Ambas têm uma abertura por onde, para ligal-as, se faz passar uma regua; fixando sobre esta a parte de ponta metalica, por meio de seu parafuso de pressão, deslisa-se a outra ao longo da regua até obter o raio desejado. Então, firmando aquella ponta no centro do circulo a traçar, não resta mais do que girar com a outra em torno deste ponto para obter a circunferencia pedida.

(13 b) Póde-se definir a esphera como *o lugar dos pontos do espaço igualmente illuminados por duas luzes, qualquer que seja a direcção destas*. Ora, a intersecção desta esphera por um plano passando pelo centro, ou por qualquer outra superficie dada, determinaria a curva igualmente illuminada sobre a superficie correspondente. No caso do plano, a curva determinada seria um circulo; de sorte que este póde ser physicamente considerado como *o lugar dos pontos igualmente illuminados por duas luzes, qualquer que seja a direcção destas sobre o seu plano.*

culo podem igualmente ser deduzidas da lei de equidistancia, como veremos em seguida.

152. — APRECIAÇÃO DE OUTRAS PRPRIEDADES DO CIRCULO. A equidistancia do centro para todos os pontos da circunferencia do circulo permitte ligar o estudo deste, a principio ao da linha recta, e depois ao das outras curvas. E ainda que a principal efficacia do circulo, neste preambulo geometrico, consista sobretudo em permittir a medida dos angulos, precisamos apreciar tambem outros attributos fundamentaes da fórma circular, visto como elles servirão de base ao estudo ulterior das curvas mais importantes.

I. *Symetria de arcos de um mesmo circulo ou de circulos de iguaes raios, em relação ao centro.* Directamente emanada da observação, a lei de equidistancia relativa ao circulo permitte deduzir facilmente todas as outras propriedades desta curva. Notemos a principio que a sua perfeita uniformidade de curvatura, resultante desta definição, faz logo surgir a propriedade que melhor distingue o circulo das curvas mais analogas, como a *ellipse*, por exemplo, indicando sua symetria em todos os sentidos em redor do centro.

E' assim que si levarmos um arco qualquer de circulo sobre outro arco do mesmo circulo, ou de um circulo descripto com o mesmo raio que o primeiro, de maneira que dois pontos quaesquer de um dos arcos caiam sobre o outro, e as convexidades estejam voltadas para o mesmo lado, o menor arco se confundirá com o maior em toda a sua extensão.

Com effeito, si levarmos o arco A′C′ (Fig. 161) sobre A C, pondo o ponto A′ sobre o ponto A, e o ponto C′ sobre C, a recta A′C′ cobrirá exactamente A C; e como os raios O′A′ e O′C′ são suppostos iguaes aos raios O A e O C, o ponto O se achará sobre o ponto O. Logo, todos os pontos do arco A′C′ devem cair sobre os do arco A C; porém como uns distam tanto do centro O′ como os outros do centro O, se conclue que o arco A′C′ se confundirá com o arco A C.

Esta coincidencia de dois segmentos lineares é tanto mais

notavel, quanto é certo que só pertence ao circulo e á linha recta, tornando evidente a symetria de todas as partes da circunferencia, devida á uniformidade de sua curvatura (13 c).

As rectas que como A B (Fig. 159), unem dois pontos quaesquer da circunferencia e a dividem, por conseguinte, em dois arcos, são denominadas *cordas* desses arcos. Os antigos chamavam de *subtensa* de um arco A D B (Fig. 159) a corda A B que passa pelas extremidades desse arco; e por isso se diz ordinariamente que *a corda subtende o arco.* Cumpre notar, porém, que a mesma recta A B é simultaneamente corda do arco A E B, que addicionado ao outro A D B, compõe a circunferencia inteira. Logo, quando o primeiro arco fôr maior que a semicircunferencia, o segundo será necessariamente menor. O diametro A A′ é, portanto, uma corda, visto como subtende dois arcos iguaes, cuja somma é a circunferencia. As outras cordas *subtendem* arcos desiguaes, de sorte que *o diametro é a maior das cordas;* porquanto outra qualquer corda C D (Fig. 159) é menor que a somma dos dois raios tirados pelas suas extremidades, isto é

$$CD < CO + OD < AA'$$

Resulta do que precede que *no mesmo circulo, ou em dois circulos descriptos com o mesmo raio, os arcos que têm cordas iguaes são iguaes, uma vez que sejam da mesma especie; isto é, ambos menores, ou ambos maiores que a semicircunferencia.* Porque quando as cordas se sobrepõem, os arcos se cobrem exactamente, sem o que não teriam todos os seus pontos equidistantes do centro.

A proposição reciproca é igualmente verdadeira; isto é, *quando os arcos são iguaes no mesmo circulo, ou em circulos descriptos com o mesmo raio, as cordas tambem são iguaes.*

(13c) Lacroix—Géometrie.

Porque pondo os arcos um sobre o outro, elles se cobrem exactamente, e as extremidades do primeiro se confundem com as do segundo; de sorte que tambem coincidem as rectas ou *cordas* que unem estas extremidades.

E' facil de vêr demais que *em um mesmo circulo, ou em circulos iguaes, o maior arco tem a maior corda, e reciprocamente; contanto que os arcos que se comparam sejam menores que a semicircumferencia.*

1.º Com effeito, sendo o arco A E maior que o arco A C (Fig. 161), o angulo A O E será visivelmente maior que o angulo A O C, e o lado A E do triangulo A O E será maior que o lado A C do triangulo A O C, porque estes triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, comprehendendo angulos desiguaes.

2.º Sendo a corda A E maior que a corda A C (Fig. 161), o angulo A O E será maior que o angulo A O C, porque os dois triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, como raios de um mesmo circulo, e o terceiro lado desigual; logo o arco A E será maior que o arco A C, em vista do que foi dito precedentemente.

II. *Posições de um ponto, ou de uma recta qualquer no plano do circulo, e suas distancias á circumferencia.* A definição usual do circulo deixa tambem vêr immediatamente que si um ponto A (Fig. 162) se acha sobre a circunferencia, sua distancia ao centro é igual ao raio; e que ella se torna menor ou maior do que este, si o ponto ficar dentro ou fóra da circunferencia. No 1.º caso, sua distancia ao centro será igual ao raio; no 2.º, sua distancia ao centro será igual á differença entre o raio e a sua distancia á circunferencia; emfim no 3.º, sua distancia ao centro será igual á somma do raio com a sua distancia á circunferencia.

Si em vez de um ponto, considerarmos agora uma recta B C (Fig. 162), a questão reduz-se á precedente, determinando o pé da perpendicular O P, baixada do centro da curva sobre a recta. Vê-se desde logo que, si a recta fôr exterior á curva,

sua distancia ao centro será igual á somma do raio com a sua distancia á circunferencia, e portanto sua distancia a esta é igual á differença entre sua distancia ao centro da curva e o respectivo raio.

Si a recta tangenciar a circunferencia, sua distancia ao centro será evidentemente igual ao raio, e nesse caso ella se denomina *tangente* á curva.

Emfim, si a recta não fôr exterior á curva, sua ditancia ao centro será menor do que o raio, e por conseguinte sua distancia á circunferencia será igual á differença entre o raio e a distancia della ao centro. E' o que se verifica na Fig. 162.

A recta B″C″ sendo prolongada encontra evidentemente a circunferencia, assignalando nella um arco EF, do qual constitue a *corda*. Si fôr ainda prolongada, cortará a circunferencia nos dois pontos E e F, e neste caso se chama *secante*.

Reciprocamente: 1.° Si a perpendicular OP, baixada do centro O sobre uma recta qualquer BC (Fig. 162), fôr maior que o raio, a linha BC estará inteiramente fóra do circulo, visto como *a perpendicular é a mais curta das rectas que se podem tirar de um ponto a uma outra recta*. 2.° Em virtude desta mesma propriedade, si a perpendicular OD, baixada do centro O sobre a recta B′C′, fôr igual ao raio, um unico ponto D desta recta se achará sobre a circunferencia do circulo. 3.° Emfim, si a perpendicular OP′ baixada do centro O sobre a recta B″C″, fôr mais curta que o raio do circulo, a circunferencia deste não terá mais de dois pontos communs com aquella recta; visto como só se poderá, do centro O, tirar sobre o seu prolongamento EF duas obliquas, OE e OF, iguaes ao raio; de sorte que esta recta terá apenas dois pontos communs com a circunferencia. Dahi resulta que *uma circunferencia não póde ser cortada por uma linha recta em mais de dois pontos*.

III. *Consequencias*. Resulta do que precede que *de um ponto qualquer da circunferencia, se póde tirar para outro uma infinidade de rectas, e dentre estas:* 1.° *A mais longa é*

a que passa pelo centro: 2.° *a mais curta é aquella que mais dista do centro;* 3.° *as médias são tanto menores quanto subtendem menores arcos, desde a extremidade da mais longa, e se tornam iguaes quando subtendem arcos iguaes;* 4.° *estas ultimas passam assim por todos os graus de grandeza, desde o da mais curta ao da mais longa;* 5.° *ellas são iguaes duas a duas, mas não em maior numero.* A 1.ª propriedade já foi demonstrada; a 2.ª e a 3.ª deduzem-se immediatamente do que foi dito (II), vendo-se que as cordas G H, G I, G K, G L, vão continuamente diminuindo. Em relação á 4.ª estas linhas G H, G I... e outras semelhantes, passam por todos os graus de grandeza média entre G H e G L; visto como o arco G L podendo ser tomado tão pequeno quanto se queira, segue-se que a distancia G L, de uma das suas extremidades á outra, póde reduzir-se abaixo de toda a grandeza dada, e tal reducção faz com que a differença entre G H e G L fique tambem inferior a toda grandeza dada; pois que si de um lado $GH > GL$, do outro $GL + LH$ é ainda maior que G H, donde resulta ser $GL > GH - LH$: de sorte que G K passa effectivamente por todos os graus de grandeza média, entre G H e G L. Quanto á 5.ª propriedade, as linhas G I e G F, médias entre as extremas G L e G A são iguaes duas a duas, e nunca em maior numero. Porque tirando os raios O I e O F, tem-se por hypothese $\wedge\, GOF = GOI$; logo os dois triangulos G O F e G O I são iguaes, o que faz $GI = GF$. Ora, qualquer outra linha a não ser G I ou G F, subtendendo, de um ou de outro lado do ponto H, um arco maior ou menor que G I ou G F, será necessariamente maior ou menor que ellas.

Observemos demais que todas as *cordas* vão crescendo até o diametro G H, que é a maior dellas, á medida que subtendem maiores arcos a partir do ponto G, ou menores arcos a partir do ponto H. Nestas condições, a perpendicular O Q tirada do centro de uma corda qualquer sobre G K não a encontra sem haver cortado a outra maior G I em N; e assim O N, parte de O Q, é maior que O R, perpendicular sobre

G I; logo, com mais forte razão $OQ > OR$. De sorte que alem da grandeza comparada dos arcos G K e G I, ou o que é o mesmo, da pequenez dos arcos H K e HI, subtendidos desde os pontos G e H pelas cordas G K e G I, se tem ainda *um meio de verificar o excesso de uma corda sobre uma outra, vendo si está a menor distancia do centro.*

E note-se que isto é verdade não sómente em relação ás cordas que partem de um mesmo ponto, como tambem para as que não se acham neste caso. Para mostral-o, basta observar que *cordas iguaes, tiradas de qualquer ponto, ficam sempre a iguaes distancias do centro.* Porque si $ST = GH$ (Fig. 163), segue-se que $OV = OU$, visto como os triangulos T O S e G O H sendo iguaes, por terem três lados respectivamente iguais, as perpendiculares O V e O U baixadas de seus vertices sobre as bases respectivas, não podem deixar de ser iguaes. Isto posto, é facil de provar primeiramente que si a corda S T é menor que a corda G L, ella está mais longe do centro. Porque sendo $ST < GL$, segue-se que se póde tirar do ponto F, no arco C L, uma corda $GH = ST$; e por conseguinte G H está mais longe do centro que G L.

Suppondo em segundo lugar que $ST > GH$, se provaria similhantemente que seria possivel tirar do ponto S, no arco S T, uma corda $SR = GH$; donde se concluiria que, por ser a perpendicular $OZ = OU > OV$, será tambem $OU > OV$, e que portanto *as menores cordas estão mais longe do centro, e as maiores mais perto.*

Observaremos emfim que as *cordas iguaes dividem o circulo, ou dois circulos do mesmo raio, em dois segmentos iguaes.* Porque, da igualdade das cordas S T e G H, resulta a igualdade dos triangulos S O T e G O H, por terem três lados respectivamente iguaes. Mas da igualdade dos angulos S O T e G O H destes triangulos, se infére a igualdade dos arcos S T e G H, da qual se conclue a dos excessos destes, $SA + TB$ e $AG + HB$, sobre a semicircunferencia. De sorte que si estes excessos forem nullos, as duas cordas confundir-

se-hão com o diametro. Dahi se conclue que um diametro divide o circulo em duas partes iguaes; o que aliás a superposição destas duas partes, A T B e A H B, demonstra immediatamente.

153. CARACTER GERAL DA NOÇÃO DE DIAMETRO. As propriedades precedentes nos levam espontaneamente a examinar as relações existentes entre as *cordas* propriamente ditas, e a maior dellas, isto é, o *diametro*. Definindo o diametro de um circulo como sendo uma corda que passa pelo centro, tem-se evidentemente caracterizado este *parametro* da curva considerada. Todavia, similhante definição só nos deixa perceber a existencia de diametros em curvas fechadas como o circulo, sendo certo entretanto que podem tambem existir em curvas abertas.

Por este motivo vamos apreciar outra propriedade do diametro circular, susceptivel por sua natureza de uma generalização ulterior a todas as curvas que admittem um tal parametro. Esta propriedade resulta immediatamente do theorema seguinte: *A perpendicular ao meio de uma corda qualquer, sendo prolongada em ambos os sentidos, passa pelo cèntro, e divide em duas partes iguaes os dois arcos subtendidos pela mesma corda.*

Com effeito, suppondo a recta C D levantada perpendicularmente ao meio da corda A B (Fig. 164), é evidente que deve passar por todos os pontos igualmente distantes dos pontos A e B; ora, o centro O é um destes pontos, porque está a igual distancia das extremidades A e B, que se acham na circunferencia A C B: Logo, a perpendicular C D quando prolongada, tem de passar pelò centro O. E como os pontos C e E em que esta perpendicular encontra a circunferencia estão respectivamente a iguaes distancias das extremidades A e B dos dois arcos subtendidos pela corda A B, resulta que serão necessariamente iguaes as cordas A C e B C, bem como A E e B E; logo, os arcos subtendidos por estas cordas serão iguaes, em virtude do que dissemos; donde se segue que os

pontos C e E serão respectivamente os meios dos arcos A C B e A E B. Portanto, a recta C D, sendo prolongada, passará pelo centro O, e pelo meio dos arcos subtendidos pela corda A B: será assim um diametro.

Advertencia. O meio D da corda A B, os meios C e E dos arcos que ella subtende, e o centro O do circulo, são ao todo quatro pontos situados sobre o diametro C E, e este diametro é alem disto uma recta perpendicular á corda. São portanto cinco condições a que satisfaz sempre o diametro do circulo em relação á corda. Ora, como duas condições são sufficientes para determinar uma recta, segue-se que três destas cinco condições serão satisfeitas, desde que duas o sejam. Resulta, pois, que daqui se podem deduzir tantas proposições quantas as combinações possiveis com os cinco elementos considerados, dois a dois, isto é: $\frac{5.4}{1.2} = 10$.

Entre estas 10 proposições citamos apenas as três seguintes, como mais importantes: 1.ª A perpendicular baixada do *centro* sobre a *corda* (13d) cairá no meio desta, e passará pelo meio do arco subtendido; 2.ª A linha tirada pelo centro e pelo meio da corda é perpendicular a esta, e passa pelo meio de cada um dos arcos; 3.ª A recta que passa pelo centro e pelo meio de um arco é perpendicular ao meio da corda, e passa pelo meio do outro arco por ella subtendido.

Estas proposições podem ser demonstradas directamente ou por absurdo, com o auxilio do theorema principal. Mas isto se torna inutil, e sómente as mencionámos para mostrar que seria impossivel pretender apreciar no ensino ordinario todas as consequencias que podem ser deduzidas dos principaes theoremas geometricos. E esta verdade sobresae ainda mais aqui, attendendo que estas proposições poderiam, por

---

(13 d) Como de um ponto dado não se póde baixar mais de uma perpendicular sobre uma recta, é evidente que toda perpendicular baixada do centro, ou do meio do arco, cairá no meio da corda, e se confundirá com a perpendicular ahi levantada.

sua vez, dar lugar a muitas outras. Assim, por exemplo, da 2.ª proposição acima, resulta que *duas cordas que si dividem mutuamente ao meio, são necessariamente diametros.* Porque si o não fossem, a linha tirada do centro para o seu encontro (meio de cada uma das cordas) seria perpendicular a ambas, o que é impossivel, pois que ellas concorrem.

A parte C D do raio, (Fig. 164), comprehendida entre o meio do arco A B, chamada *flecha* do arco A B, poderia tambem ser relacionada com as grandezas consideradas, e daria ainda lugar a muitas outras proposições, o que patenteia a necessidade de restringir estas deduções aos casos verdadeiramente uteis. Entre estes devemos mencionar as duas consequencias seguintes, que se deduzem do theorema principal:

1.ª *Para achar o centro da circumferencia a que pertence um arco dado, basta traçar duas cordas a partir das extremidades desse arco, e levantar perpendiculares ao meio dellas: a intersecção dessas rectas será o centro procurado*, porquanto vimos que as perpendiculares aos meios das cordas passam necessariamente pelo centro.

2.ª Si tivermos num circulo muitas cordas parallelas a uma direcção dada AB (Fig. 164), a recta CE que fôr perpendicular a uma, será tambem perpendicular ás outras, e dividirá ao meio cada uma dellas, passando portanto pelo centro. Dahi resulta, pois, que *o lugar geometrico dos meios das cordas, parallelas a uma direcção dada, é o diametro perpendicular a esta direcção.* Assim, pois, pode-se conceber o *diametro* como sendo *a linha que une os meios de uma serie de cordas parallelas.* E veremos que similhante definição pode convir a todas as curvas que são susceptiveis de *diametro.* De sorte que este nome, por muito tempo limitado ao circulo, para nele designar toda a recta passando pelo centro, indica actualmente para uma curva qualquer a linha, algumas vezes recta, mas de ordinario curva, que nella reune todos os meios de uma serie de cordas parallelas. No caso do circulo, cada corda sómente junta dois pontos, e o mesmo acontecerá ás curvas que

não tiverem mais de dois pontos em linha recta. No caso contrario, cada corda apresentará tantos meios quantas forem as combinações binarias entre suas intersecções, o que permittirá traçar o diametro relativo ao systema de cordas considerado. Concebe-se, enfim, que uma mesma curva possa apresentar simultaneamente diametros rectilineos e curvilineos, conforme veremos na *geometria algebrica*.

Todavia, quasi sempre os diametros curvilineos são curvas mais complicadas do que aquellas a que elles pertencem. Por isto, só interessa conhecer os diametros rectilineos, principalmente aquelles que são *eixos geometricos* propriamente ditos, isto é, rectas em torno das quaes uma curva é symetrica. Aliás, estes ultimos diametros rectilineos só se distinguem dos outros por serem perpendiculares ás cordas correspondentes, como sempre acontece no circulo, onde dois desses eixos rectangulares dividem esta curva em quatro partes iguaes, chamadas *quadrantes*.

A uniformidade do circulo faz ainda com que *os arcos interceptados na mesma circunferencia entre duas cordas paralelas sejam sempre iguaes.* Com efeito, supponhamos as cordas parallelas A B e M N (Fig. 164). Tirando a linha C D perpendicular ao meio de A D, ella sel-o-ha tambem a M N, e passará pelo meio dos arcos correspondentes; logo o ponto C é meio do arco A B e do arco M N.

Dahi resulta que

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}, \quad \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{CN},$$

e portanto $\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CN}$, ou $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BN}$

Tratando-se porêm de curvas differentes do circulo, é evidente que as cordas parallelas não poderão ter arcos iguaes, a não ser em casos particulares, e isto sómente em direcções determinadas pela natureza da curva.

154 — Reflexões sobre a noção de centro: sua generalização. No capitulo precedente vimos que o *centro* de uma figura plana, ou de três dimensões, não é mais do que um

ponto que divide em partes symetricas, em relação a elle, todas as linhas rectas que por ahi passam e terminam no contorno da figura. Assim, o ponto de concurso das diagonaes de um parallelogrammo, o ponto de concurso das diagonaes de um paralleiepipedo (Fig. 120), são os centros de figura desse parallelogrammo, ou desse parallelepipedo, etc... Apreciando esta noção no caso das curvas, verifica-se desde logo que ella convêm ao circulo, porquanto vimos que o centro deste é um ponto interior, em relação ao qual se acham symetricamente collocados todos os pontos da circunferencia, sendo ao mesmo tempo o ponto de concurso de todos os diametros, que ahi ficam divididos em partes iguaes. Comprehende-se, porém, que no caso curvilineo a existencia de um centro unico exige necessariamente o concur-so de condições de symetria que não se realizam na maioria das vezes. Sómente nas curvas do 2.º, 3.º, 4.º,.... graus, ordinariamente chamadas algebricas, que se distinguem das outras por não poderem ser cortadas por uma recta em mais de 2, 3, 4,.... pontos, como acontece ao circulo, á ellipse..., é que se verificam em geral similhantes condições. E' mesmo facil de reconhecer *que uma curva algebrica não póde ter mais de um centro*. Porque admittindo tenha ella dois centros, se verifica facilmente que terá uma infinidade de outros centros, todos em linha recta com os dois primeiros. Mas então a curva poderá ser cortada em uma infinidade de pontos, por uma parallela á linha dos *centros*, o que não póde acontecer a uma curva algebrica. Para mostral-o representemos por C e C' dois centros de uma curva (Fig. 165), e por M um ponto qualquer desta curva: juntando o ponto M ao centro C, e prolongando a recta M C de uma quantidade igual C N, é claro que sendo C um *centro* da curva, o ponto N pertencerá necessariamente a esta curva, visto como sabemos que um centro divide ao meio todas as cordas que por elle passam. Juntando ainda N C', e prolongando esta recta de uma quantidade igual C' M', é evidente que o ponto C' sendo tambem um *centro*, o

ponto M' pertencerá ainda á curva; emfim, juntando M C', e prolongando esta recta de uma quantidade igual C' N', o ponto N' pertencerá ainda á curva. Ora a figura M N N' M' (Fig. 165) será um parallelogrammo tendo C' por *centro;* e vê-se que o meio de M' N' ficará sobre C C' em um ponto C'', tal que C' C'' = C C'.

Assim pois, se fizermos uma construcção analoga para outro ponto P da curva proposta, obteremos evidentemente um novo parallelogrammo P Q Q' P', e o mesmo ponto C'' estará ainda no meio da corda P' Q' da curva considerada. Desde então, todas as cordas que passassem em C' seriam ahi divididas em partes iguaes, de sorte que este ponto C'' seria portanto um novo *centro* da curva.

Marcha analoga nos levaria a achar um 4.º *centro* C''', situado á mesma distancia do 3.º que este está do precedente, e assim por diante. Isto posto, unindo o mesmo ponto M da curva a todos os *centros* obtidos, e tendo prolongado respectivamente as rectas assim tiradas de comprimentos iguaes a si mesmos, as extremidades destes prolongamentos achar-se-hão todas sobre N N', e além disto a igual distancia umas das outras.

Todos estes pontos pertencerão, portanto, á curva proposta, que, assim, será cortada em uma infinidade de pontos pela mesma recta N N'. Veremos que a curva assim traçada não é mais que a *senoide*; ella tem por *centros* todos os pontos equidistantes entre si em que corta o eixo x x', e ella é cortada por toda recta parallela a este eixo. Mas, essa curva polycentrica é de uma categoria transcendente, porquanto as curvas algebricas não podem ser cortadas por uma recta em uma infinidade de pontos, porém sómente num numero limitado (13 e).

(13 e) Verificaremos que uma curva algebrica propriamente dita não póde ser cortada pela linha recta em maior numero de pontos do que o indicado pelo grau da equação que a representa. A existencia de um centro é normal nas curvas algebricas do 2.º grau, taes como o circulo, a ellipse, etc., e só excepcionalmente ellas não possuem este ponto, como succede com a parabola; porém, a partir das curvas do 3.º grau, a existencia de um centro torna-se cada vez mais rara, á medida que o grau se eleva.

Em resumo, *chama-se centro de uma curva o ponto que divide ao meio todas as cordas que por elle passam, quaesquer que sejam seus comprimentos relativos.* Um tal ponto é necessariamente unico nas curvas algebricas propriamente ditas, porque ellas só pódem ter um numero limitado de pontos em linha recta. Ao contrario, as curvas transcendentes, que podem ser cortadas pela linha recta em uma infinidade de pontos, apresentam alguma vezes uma infinidade de *centros*.

E' escusado salientar quanto importa conhecer o *centro* de uma curva: se este ponto existe, sua determinação contribue evidentemente para bem apreciar a curva, e por vezes traçal-a.

Emfim, póde-se olhar *o centro de uma curva como sendo o ponto de concurso necessario de todos os seus diametros.* Comparando esta noção de *centro* com a de *diametro*, vê-se immediatamente a dependencia que existe entre ambas: Porque se uma curva tiver um centro, cada um de seus diametros deverá passar por este ponto. E reciprocamente, se todos os diametros de uma curva tiverem um ponto commum, este ponto será necessariamente *centro da curva*; de sorte que se os diametros forem parallelos, como acontece na parabola, a curva não terá *centro*.

155 — Observações sobre a noção de contacto: problema das tangentes. A correlação existente entre a linha recta e o circulo permitte desde já apreciar a importante noção de *contacto*, destinada a desempenhar em *geometria transcendente* um papel capital. Afim de que semelhante noção possa ser ulteriormente generalizada, cumpre estabelecel-a, desde já, com a maior extensão de que é susceptivel.

Para isto, imaginemos que uma recta, cortando o circulo nos dois pontos de S e E (fig. 166) gire em torno de um desses pontos, de S por exemplo, e que tendendo a saír do circulo tome posições taes como S E′, S E″ etc. E' claro que os dois pontos de intersecção da recta com o circulo se aproximam continuamente, e que emfim ha uma ultima posição S T, na

qual se reunindo em um só esses dois pontos, a recta tem apenas um ponto commum com o circulo, ou não faz mais que tocal-o. Nesta posição a recta S T diz-se *tangente* ao circulo, e o ponto S se chama por isto *ponto de contacto.*

Esta definição da tangente póde ser generalizada a qualquer outra curva, fechada ou aberta, sinuosa ou não. Assim, concebida de um modo geral, a tangente não é mais do que o limite para o qual tende uma secante de que um dos pontos de intersecção, supposto movel, se aproxima indefinidamente do outro, supposto fixo, até se confundirem exactamente. Admittindo que a rotação continúa em seguida, a intersecção movel passará alem da intersecção fixa; de sorte que em cada ponto de uma curva qualquer, a direcção tangencial serve assim de linha de demarcação entre as rectas que cortam a curva de um lado deste ponto e aquellas que a cortam do outro. Por mais multiplicadas que sejam as intersecções da secante, como acontece numa curva sinuosa, basta considerar duas, visto como dois pontos são sufficientes para determinarem tal recta: A confusão final dos dois primeiros pontos nada decide a respeito dos outros, cuja coincidencia com aquelles não póde ser facultativa, e constitue ao contrario, o caracter proprio de certos pontos excepcionaes que conheceremos mais tarde (13 f).

Uma tal definição geral de tangente comprehende evidentemente a noção inicial, a principio limitada ao circulo, para indicar ahi uma recta tendo apenas com a curva um ponto commum. Porque, para outra curva qualquer, como para o circulo, a tangente assim concebida terá necessariamente um ponto commum de menos do que as rectas que mais os tiverem: Por conseguinte, para todas as curvas que não podem offerecer mais de dois pontos em linha recta, a tangente fica

---

(13 f) Verifica-se, por exemplo, este caso quando varios ramos de uma curva se cruzam num mesmo ponto cortando-se, ou simplesmente tocando-se; este ponto é chamado duplo, triplo, etc., conforme o numero de ramos que por elle passam, e dá-se-lhe geralmente o nome de *ponto multiplo.*

caracterizada pela unidade de contacto destes dois pontos, segundo a concepção primitiva.

«Esta generalização está, aliás, realizada de um modo inteiramente conforme ao destino fundamental da theoria das tangentes, no dominio mais elevado da *geometria*. Porque a indispensavel aproximação entre as figuras curvilineas e as rectilineas, base natural das principaes especulações geometricas, suppõe sempre que se tenha a principio determinado a lei segundo a qual variam as direcções dos lados de um polygono infinitesimal, que se substitue mentalmente á curva, o que resulta sem duvida de similhante concepção das tangentes» (13 g).

Pode, como vimos, acontecer que três, quatro, etc. pontos de intersecção da recta movel com a curva considerada venham tambem confundir-se em um só, como acontece aos dois primeiros na posição limite da mesma recta: esta será ainda uma tangente; mas, então, neste caso, o seu contacto com a curva torna-se mais intimo que o de uma tangente ordinaria, e dahi resultam as diversas *ordens de contacto*. Assim, o contacto é de segunda ordem quando as linhas têm três pontos communs infinitamente vizinhos, etc.

Tratando-se particularmente de curvas fechadas e convexas como o circulo, a ellipse, etc... *a tangente pode ainda ser definida como resultando da translação de uma secante quando os dois pontos de intersecção se confundem num só.*

Com effeito, supponhamos que a secante S E (Fig. 166), se move parallelamente a si mesma, occupando successivamente as posições $S_1 E_1$, $S_2 E_2$..., todas por conseguinte parallelas entre si. Pelo que dissemos no numero anteprecedente, o ponto M é sempre o meio de qualquer dos arcos S M E, $S_1 M E_1$, $S_2 M E_2$... e como estes arcos vão sempre diminuindo, ou os pontos S e E se aproximando um do outro, é

(13 g) A. Comte — Géométrie Analit.

claro que quando a secante chegar á posição da tangente S_3 T, os dois extremos do arco estarão reunidos no ponto M. A tangente é, pois, a ultima posição da secante ao sair do circulo, ou *a tangente é o limite das secantes.*

E' facil de verificar que *a tangente ao circulo é perpendicular á extremidade do raio que termina no ponto de contacto;* e reciprocamente, que *a perpendicular tirada por um ponto da circumferencia do circulo sobre o raio que passa por este ponto, é tangente ao circulo.* Com effeito, a tangente no ponto S (Fig. 166) não póde deixar de ser a linha S T, perpendicular sobre o raio S O; porque não tendo esta tangente outro ponto commum com a circunferencia sinão o ponto de contacto S, e estando os outros pontos mais distantes do centro do que este, segue-se que o raio S O é a linha mais curta que se pode tirar do centro sobre a tangente, e por consequencia, é perpendicular a esta. Por este motivo o raio S O denomina-se *normal,* e para outra curva qualquer se dá tambem este nome á perpendicular elevada, no ponto de contacto, á sua tangente. Reciprocamente, a linha S T, perpendicular ao raio S O no ponto S, tem todos os outros pontos mais distantes do centro O do que o ponto S, porque todas as rectas tiradas de um ou de outro lado, como por exemplo O C e O D, são obliquas e necessariamente mais compridas que S O. Por consequencia, os pontos C e D estão fóra do circulo, e a recta T T' que tem um só ponto S commum com a circunferencia S M E, é tangente a esta.

Do que precede, resulta immediatamente que para tirar a tangente a um ponto qualquer S da circunferencia de um circulo S M E, basta levantar uma perpendicular S T ao extremo do raio que passa pelo ponto considerado.

Já vimos como se póde, com a regua e com o esquadro, levantar uma perpendicular a qualquer recta, num ponto dado sobre esta. Mas, similhante construcção póde ainda ser realizada com a *regua* e o *compasso.* Seja O A (Fig. 167) a recta dada, e A o ponto em que se quer elevar a perpendicular. E'

claro que prolongando O A e tomando de um lado e do outro do ponto A as duas distancias iguaes A B e A C, a questão se reduz a determinar um outro ponto que se ache como A a igual distancia de B e C; porque então, unindo-o a A ter-se-ha a perpendicular pedida. Por conseguinte, basta, dos pontos B e C como centros e com uma abertura de compasso maior que B A, descrever dois arcos que se cortarão no ponto D, e tirando A D o problema estará resolvido.

São estas as considerações que deviamos fazer sobre o caso mais elementar da theoria das tangentes, *cuja questão principal consiste em determinar em cada ponto de uma curva qualquer a direcção de sua tangente.* Tal é o famoso problema das tangentes, que desempenhou modernamente, no dominio superior da *geometria*, um papel não menos importante do que teve na *geometria dos antigos a duplicação do cubo* e a *trisecção do angulo.*

No caso do circulo o problema é accessivel á *geometria ordinaria*, mas, em qualquer outra curva differente do circulo, apresenta difficuldades muito maiores, exigindo por isto a intervenção do *calculo transcendente*, a cuja creação conduziu no seculo XVII, graças aos trabalhos de Descartes, Fermat, Barrow e principalmente de Leibniz, completados depois por Lagrange.

156 — INSTITUIÇÃO DE DIVERSAS QUESTÕES ACCESSORIAS SOBRE AS TANGENTES; CIRCULOS TANGENTES E CIRCULOS SECANTES. O que caracteriza uma tangente ao circulo é, como vimos, ter ella uma direcção constantemente perpendicular á do raio da curva. Esta propriedade permitte resolver alguns problemas importantes, quer sobre as tangentes, aos circulos, quer sobre os circulos tangentes entre si; permittindo apreciar todas as circunstancias de posição, nas quaes as circunferencias podem achar-se, num mesmo plano. Passemos a considerar os mais uteis destes problemas.

I. — *Em um circulo dado tirar uma tangente que seja parallela a uma recta dada.*

Solução. Baixe-se do centro do circulo uma perpendicular sobre a recta dada; no ponto de intersecção desta perpendicular com a circunferencia, levante-se outra perpendicular que será a tangente pedida (Fig. 168). Porque; a tangente obtida e a recta dada sendo ambas perpendiculares á direcção do raio, são evidentemente parallelas entre si. Como se vê, a solução deste problema exige que se saiba abaixar uma perpendicular a uma recta, de um ponto exterior a ella. Já fizémos esta construcção com a regua e o esquadro, mas póde-se tambem executal-a com a regua e o compasso. Para isto, supponhamos seja AB a recta dada e O o ponto exterior (Fig. 168). Fazendo centro em O, com um raio sufficientemente grande, descreva-se um arco de circulo que corte a recta AB nos pontos D e E. Fazendo centro em D e depois em E, com um raio maior que a metade de DE, descrevam-se os arcos *m n* e *p q*, que se cortam em C, abaixo de AB. A recta OC será a perpendicular pedida.

Com effeito, o ponto O dista igualmente de D e E, por serem OD e OE raios do mesmo circulo; e o ponto C dista igualmente dos mesmos pontos D e E por terem iguaes os raios DC e EC: Assim pois, a recta OC tendo seus pontos equidistantes dos pontos D e E, será perpendiculor ao meio de DE, e, portanto, perpendicular a AB.

II. — *Descrever um circulo cuja circunferencia passe por um ponto dado e seja tangente a uma recta noutro ponto fixado sobre esta.*

1.º — Sejam C o ponto dado (Fig. 169), AB a recta dada, e D o ponto de contacto sobre esta. Una-se C com D, e levante-se a perpendicular EF ao meio de CD; pelo ponto D levante-se a perpendicular DG sobre AB; a intersecção O das duas perpendiculares é o centro do circulo pedido, e OD ou OC o seu raio. Com effeito, o centro deve estar sobre EO por ter um raio perpendicular ao meio da corda (153), e sobre DO por ser perpendicular á tangente no ponto de contacto (155), logo o centro O será a intersecção das duas rectas.

2.º — Si o ponto C estiver sobre uma outra recta dada C H (Fig. 169) basta tirar a bissectriz I O do angulo formado por esta recta com a outra A B, e a intersecção de tal bissectriz com a perpendicular D G terá o centro do circulo procurado.

Este problema serve de base á *concordancia* (*) de duas rectas no traçado dos caminhos de ferro.

3.º — Póde acontecer que o raio do arco circular de concordancia seja dado *a priori*, o que acontece ordinariamente no traçado das curvas dos caminhos de ferro. Neste caso basta tirar uma recta O K parallela a uma das rectas dadas A B (Fig. 169) e a uma distancia desta linha igual ao raio dado: O ponto O onde ella encontra a bissectriz I O do angulo formado pelas duas rectas dadas é o centro do circulo de concordancia. Baixa-se então do ponto O as perpendiculares O D e O C; os pés D e C dessas perpendiculares serão os pontos de contacto ou de concordancia. Desde então, si do ponto O como centro e, com O D para raio, se descrever um arco de circulo, elle passará no ponto C e terá para tangente a recta A B em D e a recta C H em C. As duas rectas dadas achar-se-hão em concordancia por intermedio do arco D C.

III. — *Inscrever um circulo em um triangulo dado A B C.*

Solução. Tirem-se as bissectrizes A O e B O (Fig. 170), dos angulos A e B; estas rectas cortam-se num ponto O, que é equidistante dos tres lados A B, A C e B C: logo este ponto pertence ás perpendiculares a elles. Si, pois, abaixarmos de O as perpendiculares O D, O E e O F aos lados do triangulo, essas perpendiculares serão iguaes, e a circunferencia descrita do ponto O como centro e tendo como raio O D, será tangente aos três lados, e, portanto, inscrita ao triangulo.

(*) A palavra *concordancia* significa aqui a reunião de duas linhas rectas por um arco de circulo, sob a condição de serem tangentes a este nos pontos communs que se chamam então — *pontos de concordancia*. O principal problema desta especie consiste em reunir duas linhas dadas por uma terceira que faça concordancia com as duas primeiras. Pode ser resolvido por meio de curvas diversas; mas nas applicações communs se costuma sempre empregar o *circulo* como linha auxiliar para a concordancia das rectas e mesmo das curvas A concordancia é frequentemente empregada nas artes graphicas, como por ex., no traçado das molduras e das diversas curvas polycentricas nas arcadas, etc.

Advertencia. O ponto O, por ser equidistante dos lados B C e A C, pertence tambem á bissectriz do angulo C; logo, *as tres bissectrizes dos angulos de um triangulo concorrem num mesmo ponto.*

Observemos tambem que tirando as bissectrizes dos dois angulos externos M B C e B C N, o seu ponto de concurso O′ será o centro de um circulo tangente ao lado B C e aos prolongamentos dos outros dois, o qual se chama *ex-inscrito.* Achar-se-hão do mesmo modo os centros O″ e O‴ das outras duas circunferencias tangentes a cada um dos lados do triangulo e aos prolongamentos dos outros dois. Ha pois, em geral, quatro circunferencias tangentes a três rectas dadas (13 h).

IV. *Construir as tangentes communs a duas circunferencias dadas.*

Solução. Duas circunferencias que são tangentes á mesma recta podem estar ambas do mesmo lado da recta, ou uma

---

(13 h) Designando por a, b e c, os lados BC, AC e AB do triangulo ABC e por p o seu semi-perimetro, tem-se para as distancias do vertice B aos pontos em que a recta BA prolongada toca os quatro circulos:

$$BH = p$$
$$BG = p - b$$
$$BE = p - a$$
$$BI = p - c.$$

Com effeito (163), a igualdade

$$2p = AB + AD + DC + BC = \\ = AB + AH + CK + BC = \\ = BH + BK = 2BH,$$

nos dá:

$$BH = p$$

Obteriamos da mesma maneira

$$AI = p,$$

de sorte que

$$BI = AI - AB = p - c.$$

Verifica-se ainda que

$$BF = BE = p - a.$$

Emfim, tem-se

$$2BG = BG + BL = AB - AG + CL - BC = \\ = AB - AP + CP - BC = \\ = AB + BC - AC = 2p - b - b = \\ = 2p - 2b;$$

isto e

$$BG = p - b.$$

de um lado e outra do outro; no primeiro caso a recta chama-se uma *tangente commum exterior*; no segundo caso é uma *tangente commum interior*.

1.° *Tangentes exteriores.*

Sejam O e O' (Fig. 171) os centros de duas circumferencias de raios desiguaes, sendo $OD > O'E$. Fazendo centro em O, com um raio OC igual á differença dos raios dados, descreva-se uma circumferencia para a qual se tirem, do ponto O', duas tangentes auxiliares O'C e O'F. Tracem-se em seguida os raios OC e OF que se prolonguem até encontrar em A e D a circumferencia O; e do centro O' os raios O'B e O'E, respectivamente parallelos a AO e OD: as rectas AB e DE são as tangentes pedidas.

Com effeito, AC é igual e parallela a BO' por construcção; assim, AB é parallela a CO'. Mas, CO' é perpendicular a OA; de sorte que a sua parallela AB será perpendicular a OA e, portanto, perpendicular a O'B que é parallela a OA: logo AB é tangente commum ás duas circumferencias. Demonstra-se do mesmo modo que DE é tangente commum ás duas circumferencias.

Observação. Tirando a recta GO (Fig. 171) do ponto de concurso das duas tangentes para o centro O do circulo DA, formam-se os triangulos rectangulos GDO e GAO, que são iguaes por terem a hypotenusa commum e iguaes os cathetos OD e OA. Dahi resulta que são iguaes os angulos DGO e OGA, bem como os lados DG e AG; de sorte que *a recta que une o ponto de concurso de duas tangentes ao centro do circulo, divide o angulo formado por ellas em duas partes iguaes, sendo tambem iguaes os segmentos das mesmas tangentes comprehendidos entre o ponto de concurso e os respectivos pontos de tangencia.*

Reciprocamente, *traçando a bissectriz do angulo formado por duas tangentes, tal recta de divisão passará pelo centro do circulo.* Porque si assim não fôsse, juntando este centro ao ponto de concurso das tangentes, o angulo formado por estas

seria dividido em duas partes iguaes por duas rectas distinctas, o que é absurdo.

2.º *Tangentes interiores.*

Fazendo centro em O (Fig. 172) e com o raio O C igual á somma dos raios das circunferencias dadas, descreva-se uma outra circunferencia para a qual se tirem, do ponto O', as tangentes auxiliares O'C e O'F. Tracem-se, em seguida, os raios O C e O F que cortarão a circunferencia O nos pontos A e D; e pelo centro O' os raios O'B, parallelo a O C, e O'E, parallelo a O F: as rectas A B e D E são as tangentes pedidas.

Com effeito, A C é igual e parallela a O'B, portanto A B é parallela a C O'; mas, C O' é perpendicular a O C; então A B será perpendicular a O C e, portanto, perpendicular a O'B que é parallela a O C; logo A B é tangente commum ás duas circunferencias. Demonstra-se do mesmo modo que D E é tangente commum ás mesmas circunferencias.

Observemos que, si as duas circunferencias são iguaes, não é possivel applicar a construcção precedente para o caso das tangentes communs exteriores. Mas, como neste caso as tangentes exteriores são parallelas á linha dos centros (Fig. 173), basta tirar-se a mesma linha dos centros O O', e os raios O A e O'B perpendiculares a O O': unindo A com B tem-se uma tangente commum exterior. A outra será obtida pelo mesmo processo.

Com effeito, sendo A B parallela a O O', é perpendicular a O A e O'B; logo, é tangente aos dois circulos.

As tangentes interiores constroem-se como no caso antecedente.

Advertencia. Considerando as differentes posições relativas das duas circunferencias, chega-se ás consequencias seguintes:

1.ª *Si as duas circunferencias são exteriores, ha quatro tangentes communs, duas exteriores e duas interiores* (Figs. 171 e 172).

Com effeito, sendo então a distancia dos centros O O′ evidentemente maior que a somma dos raios, é tambem maior que a sua differença; portanto, o ponto O′ é sempre exterior ao circulo auxiliar O C. Assim, é sempre possivel tirar por O′ duas tangentes a este circulo, o que é sufficiente para se poder construir as quatro tangentes communs.

2.ª *Si as duas circunferencias são tangentes exteriormente, ha tres tangentes communs, duas exteriores* A′ T′ e A″ T‴ *e uma interior* A T (Fig. 174).

3.ª *Si as duas circunferencias são secantes, ha duas tangentes communs* A T e A′ T′ *que são as exteriores* (Fig. 175).

4.ª *Si as duas circunferencias são tangentes interiormente ha uma só tangente commum, que é a exterior* A T (Fig. 174).

5.ª *Si as duas circunferencias são interiores uma á outra é visivel que não ha tangente commum.*

Condições de contacto de dois circulos; tangente commum no ponto de contacto. Examinemos agora as posições relativas dos circulos entre si, sem saírem do mesmo plano. Si duas circunferencias de circulo C e C′ (Fig. 174), têm um ponto commum A sobre a recta C C′ que contem seus centros, ellas só se podem encontrar neste ponto. Porque, tirando C H e C′ H para outro ponto qualquer H de uma dellas, teremos evidentemente CC' ou $CA + AC' < CH + HC'$, de sorte que subtrahindo as quantidades iguaes C A e C H, resta $AC' < HC'$: Logo, o ponto H está fóra da circunferencia C′. Si os centros se acharem em C e C″, de um mesmo lado do ponto commum A, ter-se-ha C H ou $CA < CC'' + C''H$, de sorte que subtrahindo C C″, restará $C''A < C''H$: Logo o ponto H estará ainda fóra da circunferencia.

A perpendicular A T sobre a linha dos centros C C (Fig. 174), no ponto A é, como se vê, uma tangente commum ás duas circunferencias que se *osculam* em A, e o contacto rectilineo com ellas se diz de *segunda ordem*; porque cada uma tem, de facto, um ponto commum com a tangente A T. Demais, resulta que si prolongarmos indefinidamente a recta

CA, será ella o lugar geometrico dos centros de todas as circunferencias tangentes á circunferencia C no ponto A, e fazendo o mesmo para a recta AT, esta perpendicular TAT_1 á recta CA será uma tangente commum a todas essas circunferencias. E como cada uma dellas envolve necessariamente todas aquellas cujos centros ficam comprehendidos entre o seu e o ponto A, segue-se que taes circunferencias se aproximarão tanto mais da tangente commum TT_1 quanto maiores forem os seus raios. Dahi resulta que se póde considerar a recta TT_1 como o *limite* dellas, isto é, *a tangente como uma circunferencia cujo raio é infinito.*

No caso em que os dois circulos C e C' tiverem em M um ponto commum (Fig. 175), fóra da linha que junta seus centros, suas circunferencias se cortarão. Com effeito, tirando MP perpendicular sobre CC' e tomando $PI = IM$, as obliquas iguaes CM e CP mostram que P é outro ponto da circunferencia C; porém P e M estão tambem sobre a circunferencia C', porque $C'M = C'P$: Logo estas circunferencias têm um segundo ponto commum em P, e, portanto, se cortam. Um terceiro ponto seria evidentemente impossivel. Concluimos, portanto: 1.° *Si as circunferencias têm apenas um ponto commum, este está situado sobre a linha que junta seus centros, e reciprocamente.* Alem disto *a distancia dos centros é igual á somma ou á differença dos raios, conforme um dos dois circulos tangentes é exterior ou interior ao outro;* porque se tem (Fig. 174), $CC' = CA + C'A$, ou $CC'' = CA - C''A$.

2.° *Si os circulos se cortam, a linha dos centros é perpendicular ao meio da corda commum.* Demais, *a distancia dos centros é menor que a somma dos raios, e maior que a sua differença;* porque se tem visivelmente (Fig. 175), $CC' < CM + C'M$ e $CC' + C'M > CM$, ou $CC' > CM - C'M$.

3.° Emfim, *si os circulos não tiverem nenhum ponto commum, a distancia dos centros será maior que a somma dos raios ou menor que sua differença*, conforme os circulos forem

ou não *exteriores*; porque se tem então (Fig. 176), $CD = DO - CA - AO$ e $CC' = CA + C'B + AB$. Dahi resulta que, chamando D as distancias dos centros, R e R' os raios, se tem, quando as circunferencias se cortam:

$$D < R + R' \quad \text{e } D > R - R'.$$

Quando se tocam:

$$\begin{matrix} \text{exteriormente} \\ \text{interiormente} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} D = R + R' \\ D = R - R' \end{matrix} \right.$$

Quando não têm nenhum ponto commum:

$$\begin{matrix} \text{exteriores} \\ \text{interiores} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} D > R + R' \\ D < R - R' \end{matrix} \right.$$

A reciproca de cada uma destas proposições é igualmente verdadeira. Si por exemplo tivermos ao mesmo tempo $D < R + R'$ e $> R - R'$, as duas circunferencias se cortarão; porque si ellas não se cortassem ter-se-ia $D = R + R'$ ou $= R - R'$; e si ellas não tivessem nenhum ponto de intersecção, D seria $> R + R'$ ou $< R - R'$.

Similhantemente, si $D = R + R'$, os circulos se tocam exteriormente; porque si assim não fosse seria preciso admittir uma das quatro outras disposições. Ora, si elles se cortassem teriamos $D < R + R'$, o que é contrario á hypothese feita; si se tocassem interiormente viria $D = R - R'$, o que tambem não póde ser, visto como $D = R + R'$ etc.

Em geral, quando se ha previsto todos os casos possiveis de um systema, e cada um desses comporta condições que não podem coexistir com aquellas fornecidas pelos outros casos, as reciprocas são verdadeiras e se demonstram como acabamos de mostrar; foi o que fizémos, aliás, na theoria das perpendiculares e obliquas.

Resulta do que precede que se conhecendo a posição dos

centros e os raios de dois circulos, se póde verificar si elles se cortam ou se tocam, etc., não sendo para isto necessario descrever as circunferencias. Bastará addicionar ou subtrahir os raios e comparar os resultados com a distancia dos centros, para decidir a qual dos cinco casos possiveis a figura proposta deve ser referida.

V. *Sendo dados dois pontos, um em A,* (Fig. 177), *sobre um arco circular C', e o outro em B, descrever um circulo cuja circunferencia passe por estes pontos A* e *B, e toque a circunferencia de C' no ponto A.*

1.º — Basta traçar a tangente AT ao circulo dado, para que a questão fique reduzida ao 1.º caso do problema II.

2.º — Si o ponto B estiver sobre uma recta dada BF (Fig. 177) sob a condição de ser tangente á circunferencia, bastará tirar a bissectriz HC do angulo formado por ella com a tangente AT ao arco dado, e a intersecção de tal bissectriz com a perpendicular AC á mesma tangente será o centro do circulo pedido, similhantemente ao que se fez no 2.º caso do problema II. Como aquelle, serve tambem este para estabelecer a concordancia de uma recta e um arco circular.

3.º — Póde acontecer que o comprimento do raio do arco de concordancia seja dado *a priori*, como succede de ordinario ao traçado das curvas de caminhos de ferro. Neste caso, basta tirar uma parallela IC á tangente TAT' (Fig. 177) numa distancia desta recta igual ao raio dado do circulo auxiliar. Então, do centro C' do arco dado e com o seu raio augmentado daquelle do circulo auxiliar, descreve-se um arco de circulo *m n*. O ponto C onde este circulo encontra a recta IC, será o centro do circulo auxiliar pedido. Baixar-se-ha do ponto C sobre BF a perpendicular CB, e juntar-se-ha C a C' por uma recta, a qual encontrará o arco dado num ponto A: os pontos A e B serão os de concordancia. Desde então, do ponto C como centro e com CB para raio, descrever-se-ha um arco de circulo, o qual passará no ponto A e será tangente á recta BF em B, bem como ao arco dado em A.

Pode ainda acontecer que o raio do circulo auxiliar não seja dado, mas que se dê em seu lugar já o ponto de concordancia B, já o ponto de concordancia A.

4.º Na primeira hypothese tira-se pelo ponto B a recta BM perpendicular á recta BF (Fig. 177), e toma-se nesta recta um comprimento BM igual ao raio do arco C′; liga-se M a C′ e ao meio desta recta de juncção se levanta a perpendicular DC. O ponto C onde as perpendiculares MC e DC se encontrarem será o centro do circulo procurado; liga-se C a C′ e tem-se assim o ponto de concordancia A. Si do ponto C como centro e tendo para raio CB se descrever um arco de circulo, elle passará pelo ponto B, sendo tangente á recta BF em B, e tambem ao arco C′.

5.º — Na segunda hypothese, isto é, si fôr fixado o ponto de concordancia A, tira-se neste ponto a tangente TT′ (Fig. 177), e o problema reduz-se então a fazer concordar as duas rectas BF e TT′, com a condição de ser o ponto B um dos pontos de concordancia, questão que foi resolvida acima.

VI. — *Sendo dados dois arcos de circulo EOF e GBH* (Fig. 176) *traçar um outro que lhes seja tangente e os faça concordar.*

1.º — Si o raio do circulo auxiliar é dado, descrevam-se dos pontos D e C′ como centros, e raios respectivamente iguaes aos dos arcos EF e GH, augmentados do raio do circulo auxiliar, dois arcos circulares cuja intersecção I será o centro do circulo pedido.

Então junte-se ID e IC′, o que fará conhecer os pontos de concordancia M e N. Desde então, si do ponto I como centro e com o raio IM se descrever um arco de circulo, elle passará pelo ponto N e será tangente ao arco EF em M e ao arco GH em N.

2.º Si não é dado o raio do circulo auxiliar, mas sómente um dos pontos de concordancia, o ponto M por ex., basta tirar neste ponto a tangente MT (Fig. 176), e o problema fica assim reduzido a fazer concordar a recta MT e o arco de cir-

culo G H, com a condição do ponto M ser o ponto de concordancia da recta, questão que foi resolvida acima.

VII. *Fazer a concordancia de duas rectas A B e C D sob a condição de serem B e C os pontos de contacto* (Fig. 177 a).

Solução. — Effectua-se a concordancia por meio de dois arcos de circulo do mesmo raio os quaes fazem concordancia entre si. Procede-se para isto do modo seguinte: Liga-se B a C por uma recta indefinida. Nos pontos B e C tiram-se sobre A B e sobre C D as perpendiculares B H e C K que devem ter comprimentos iguaes, embora quaesquer. Pelo ponto K tira-se K F parallela a B C; e do ponto H como centro com um raio duplo da perpendicular B H descreve-se um arco de circulo que córte K F num ponto E. Liga-se B a E por uma recta que corte C K num ponto I. Liga-se E a H, e pelo ponto I se tira I O parallela a E H. Os pontos O e I serão os centros dos dois arcos circulares pedidos. Com effeito, tirando pelo ponto E a recta E P parallela a C K, a figura C K E P será um parallelogrammo e ter-se-ha E P = C K = B H. Os triangulos similhantes B I C e B E P darão a proporção C I : : E P = B I : B E (1). Os triangulos similhantes B O I e B E H darão por seu turno a proporção B O : B H = B I : B E (2). Estas duas proporções tendo os tres ultimos termos iguaes resulta C I = B O; mas os ultimos triangulos dão tambem O I : : B O : : H E : B H. Ora, H E é por construcção o dobro de B O. Dahi resulta que si do ponto O como centro e tendo para raio O B se descrever um arco de circulo, elle fará concordancia com A B em B, e cortará O I num ponto *m* que será o meio de O I; si, pois, do ponto I como centro, com *I m* para raio se descrever um segundo arco de circulo, elle fará concordancia com o primeiro em *m* e tangenciará a recta C D em C.

Veremos que para resolver este problema se pode tambem empregar a *parabola;* mas a sua solução pertence ao dominio da *geometria algebrica.* Este methodo encontra particularmente applicação no traçado das estradas.

160. Similhança entre os circulos. Já vimos que a noção

de *similhança* convem por sua natureza a todas as figuras possiveis. Applicada, a principio, ás figuras rectilineas cujos elementos são directamente apreciaveis assim como as leis de seus aggregados, pôde depois ser estendida ás figuras curvilineas. Pareceu á primeira vista que uma tal extensão só podia ser operada considerando as curvas como polygonos de uma infinidade de lados infinitamente pequenos, como faz a *geometria transcendente*, o que permitte ahi exprimir distintamente a igualdade directa dos angulos e a proporcionalidade dos lados. Todavia, um exame mais aprofundado da questão levou a reconhecer que era possivel, com os recursos da *geometria preliminar*, generalizar a noção de similhança ás curvas planas.

Neste caso, a questão consiste em descobrir as condições precisas da similhança das curvas, ou em constatar que a identidade de especie não exige nenhuma relação particular entre ellas. Um exame aprofundado desta importante questão levou a reconhecer que podia ser resolvida elementarmente por meio dos dois theoremas citados no n.º 120 que, embora instituidos para os polygonos, são susceptiveis de se tornar immediatamente apreciaveis para as curvas.

O segundo destes theoremas refere-se, como vimos, á situação parallela em que podem ser collocados dois contornos similhantes, em virtude da igualdade necessaria das inclinações respectivas, por isso que basta voltar um unico lado parallelamente a seu homologo, para que todos os outros se dirijam por si mesmo parallelamente aos seus.

Ora, sendo assim dispostas, sabemos que, em vista da proporcionalidade dos lados, as duas figuras offerecem logo a convergencia da totalidade das rectas que nellas ligam todos os pontos homologos para um unico chamado algumas vezes *centro de similhança*, embora seja preferivel denominal-o *centro de homologia*.

Alem disto, os comprimentos, contados desde esse ponto até uma e outra figura, estão entre si numa razão constante, igual á relação linear dos dois contornos.

Reciprocamente, vimos que duas figuras assim construidas, a partir de um ponto qualquer, serão necessariamente similhantes, quer se tenham collocado os pontos homologos dividindo proporcionalmente todos os raios, quer se os tenha determinado successivamente mediante o parallelismo das cordas correspondentes. A condição fundamental para a extensão espontanea dessa propriedade ás figuras curvilineas, é ainda aqui evidentemente preenchida, por isso que directamente se evita assim a consideração de polygonos infinitesimaes, alem das que são relativas ao numero de pontos a comparar, o que não constitue, por sua natureza, nenhuma difficuldade essencial.

Reconhece-se immediatamente, por exemplo, por meio deste segundo modo, a similhança constante de dois circulos, como uma consequencia neccessaria da definição ordinaria desta curva. Basta para isto concebel-os concentricos; porque, tirando os raios do maior, suas intersecções com o menor dividem estas rectas em partes proporcionaes.

Aliás, o principio de Clairaut nos leva immediatamente a constatar a similhança de todos os circulos, partindo da propria definição. Porque, segundo esta, a grandeza do circulo fica determinada pela dimensão de seus raios; e, portanto, uma simples mudança da escala em que são construidas duas dessas curvas, poderá fazel-as coincidir; donde resulta que todas as curvas desta especie são successivamente similhantes entre si, em virtude do principio citado.

Comquanto este principio tenha sido estabelecido para as figuras rectilineas, vê-se que é possivel generalizal-o ás figuras curvilineas, constituindo assim um methodo subsidiario para constatar a similhança de duas curvas. E' assim, por exemplo, que se pode verificar a similhança das duas curvas representadas na Fig. 178 (13h).

(13h) Ellas representam os *diagrammas* fornecidos por dois cylindros de uma machina a vapor; veremos que as areas de taes figuras, expressas em centimetros quadrados, permittem avaliar o trabalho da machina.

Pode-se pois dizer em geral que duas curvas são similhantes (Fig. 178) quando uma simples mudança de escala permitte identifical-as, o que importa evidentemente em deduzir as condições de similhança das de igualdade ou identidade.

«Porque embora a mudança de escala só possa identificar uma unica dimensão, esta primeira coincidencia arrasta necessariamente a de todos os outros elementos, o que suppõe sem duvida a proporcionalidade dos comprimentos respectivos e a igualdade mutua dos angulos ahi considerados, resumo final de toda similhança.»

Resulta, emfim, do que precede que *a relação de similhança entre dois circulos não é mais do que a existente entre os seus raios* ou entre os seus diametros, o que aliás está de acôrdo com o segundo theorema acima mencionado. Porque, considerando dois circulos concentricos (Fig. 179), e traçando os raios correspondentes, O A, O A′ e O B, O B′, se deduz immediatamente a relação

$$OA : OA' :: OB : OB'$$

ou $$OA : OB :: OA' : OB',$$

donde $$OA + OB : OA' + OB' :: OA : OB \text{ ou } \frac{D}{D'} = \frac{OA}{OA'}.$$

Demais, a relação entre os contornos de duas figuras similhantes sendo a mesma que existe entre duas linhas homologas quaesquer, ter-se-ha ainda, representando por C e C′ as circunferencias das duas curvas propostas, e por R e R′ os respectivos raios

$$C : C' :: R : R'.$$

E como esta proporção não se altera si dividirmos pela

mesma quantidade *n* ambos os termos da primeira razão, virá finalmente:

$$\frac{C}{n} : \frac{C'}{n} :: R : R';$$

onde se vê que *dividindo as circumferencias no mesmo numero de partes iguaes, os comprimentos dos arcos obtidos serão ainda proporcionaes aos dos raios correspondentes.* Dos valores que taes arcos podem apresentar nos occuparemos no § seguinte.

§ 14

Medida dos angulos rectilineos. Theoria geral da proporcionalidade.

161 — Para conhecer o valor de qualquer angulo rectilineo, basta que se saiba medir o arco de um dos circulos que têm para centro o seu vertice.

A uniformidade de curvatura da circunferencia desta curva faz della, com effeito, a medida mais natural dos angulos. Porque suppondo que o vertice de um angulo esteja no centro de um circulo, cujo raio representa a unidade de comprimento, vamos vêr que este angulo pode ser substituido pelo proprio arco interceptado entre seus lados.

Não é mesmo necessario que o vertice do angulo se ache no centro, para que a circunferencia possa lhe servir de medida. Mostraremos que, em virtude de uma propriedade notavel do circulo, qualquer que seja nelle a posição desse vertice, o *angulo será sempre medido pela semi-somma dos dois arcos comprehendidos entre seus lados, prolongados se fôr necessario, devendo-se porém tomar negativamente o arco que fôr convexo em relação ao vertice, o qual será nullo no caso em que o vertice do angulo se* achar *sobre a circunferencia, e seus lados forem cordas.*

Devemos, pois, resolver em primeiro lugar o problema da medida dos arcos. Vejamos a principio *como se acha a medida commum de dois arcos de um mesmo circulo ou de circulos iguaes.*

Solução. E' evidente que a questão proposta se resolveria como fizemos com as rectas, se pudessemos applicar os arcos

PITAGORA por Pythagoras.

de circulo um sobre o outro. Mas, similhante superposição não podendo ter lugar na pratica, é supprida com a das *cordas respectivas, que quando são iguaes, correspondem a arcos iguaes.*

Assim, suppondo que a corda do arco C D (Fig. 180) pode ser applicada duas vezes sobre o arco A B, de A para E, deixando o resto E B, é claro que o arco A E, assim determinado, será composto de duas partes A d e d E, iguaes respectivamente a C D.

Logo teremos

$$AB = 2\,CD + EB$$

Tomando a corda do resto E B para applical-a sobre o arco C D, de C para F, e suppondo que ahi pode ser levada uma vez, deixando de resto o arco F D, resulta que

$$CD = EB + FD.$$

Emfim, admittindo que a corda do segundo resto F D se possa applicar quatro vezes sobre o primeiro resto E B teremos

$$EB = 4\,FD.$$

Revertendo deste ultimo valor aos dos arcos precedentes obteremos

$$EB = 4\,FD,\quad CD = 5\,FD,\quad AB = 14\,FD.$$

O arco F D é pois a medida commum dos arcos A B e C D; e como se contêm 14 vezes em um, e 5 vezes no outro, concluimos que os arcos propostos estão entre si como os numeros 14 e 5.

A operação terminará aqui, como no caso da medida das linhas rectas, todas as vezes que se achar um resto que con-

tenha exactamente o anterior, ou que seja tal que o resto seguinte escape aos nossos sentidos por sua pequenez.

II. Em lugar de medir os arcos de circulo referindo-os ás suas cordas, é preferivel comparal-os com a circunferencia inteira referida ao seu raio; de sorte que se obtem assim o valor relativo de um arco qualquer. Aliás, a medida dos angulos exige o conhecimento do valor relativo dos arcos correspondentes, isto é, a relação que existe entre o arco considerado e a circunferencia inteira. Para conseguir este resultado, suppõe-se que a circunferencia do circulo é sempre dividida no mesmo numero de partes iguaes, qualquer que seja o seu raio.

A divisão adoptada é como sabemos á *sexagesimal*, assim qualificada porque tomando o raio por unidade e dividindo-o em *60 partes iguaes*, os antigos suppuseram a circunferencia constituida por 6×60 ou 360 destas partes, denominadas *graus;* sendo por sua vez cada grau decomposto em 60 partes iguaes chamadas *minutos*, e cada minuto em outras 60 partes, denominadas *segundos*, podendo estas ser ainda subdivididas conforme a progressão decimal.

Assim, para medir um arco dado, basta determinar que fracção representa elle relativamente á circunferencia inteira, isto é, o numero de graus, minutos e segundos, etc., comprehendidos entre suas extremidades. Diz-se, por exemplo, que um arco é $\frac{1}{4}$ da circunferencia, quando elle tem $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, e por isso se denomina *quadrante*.

Cumpre, todavia, observar que o facto de dois arcos terem o mesmo numero de graus só nos autoriza a consideral-os iguaes isto é compostos do mesmo numero de unidades de comprimento, quando suppusermos que são iguaes os seus raios. De sorte que se torna preciso tomar sempre o valor do raio para unidade, afim de uniformizar todas as medidas assim obtidas. Sabemos, com effeito, que *os arcos de circulo são proporcionaes aos seus raios*, e que portanto só podem coincidir quando estes raios são iguaes.

III. Bem comprehendidas estas noções, passemos á medida dos angulos. Ella baseia-se numa propriedade de que gozam os angulos, quando têm os vertices no centro do circulo, em relação aos arcos, comprehendidos entre seus lados. Esta propriedade é a seguinte: *No mesmo circulo ou em circulos iguaes: 1.° dois angulos iguaes que têm o vertice no centro interceptam arcos iguaes; 2.° si um angulo central se compõe da somma de dois outros, o arco interceptado por este angulo é tambem a somma dos arcos interceptados por aquelles dois angulos.*

1.° Sejam A O B e A′O′B′ (Fig. 181) dois angulos iguaes, com os vertices nos centros O e O′ dos circulos O A B e O′A′B′. E′ facil de ver que os dois arcos correspondentes A B e A′B′ são tambem iguaes. Com effeito, tirando as cordas A B, A′B′, formam-se os dois triangulos A O B, A′O′B′, que são iguaes, como tendo um angulo igual comprehendido entre dois lados iguaes, isto é, $\wedge$ A O B = $\wedge$ A′O′B′, por hypothese, e os lados A O = A′O′ e O B = O′B′, como raios de circulos iguaes. Portanto, a corda A B é igual á corda A′B′ e, por conseguinte, são tambem iguaes os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ que ellas subtendem.

2.° Sejam C′O′D′ e D O E dois angulos centraes (Fig. 181); transportemos o primeiro para C O D, ao lado do segundo, de maneira a formar um angulo C O E que seja a somma dos angulos propostos. O arco C D E será evidentemente a somma dos dois arcos C D e D E; e como os arcos C D e C′D′ são iguaes, por corresponderem a angulos centraes iguaes, conclue-se que o arco C D E será a somma dos arcos C′D′ e D E.

Desta propriedade deduz-se a seguinte consequencia fundamental:

Um angulo central é sempre proporcional ao arco correspondente, isto é no mesmo circulo ou em circulos iguaes, sendo $\frac{a}{a'}$ a relação entre dois angulos centraes, ella será igual

á relação $\frac{b}{b'}$ dos arcos que elles interceptam.

Com effeito, supponhamos que a relação $\frac{a}{a'}$ dos dois angulos seja $\frac{3}{5}$, isto é, que o angulo a seja os $\frac{3}{5}$ do angulo a'. Designando por d o quinto do angulo a', ter-se-ha

$$a = 3\alpha \quad e \quad a' = 5\alpha$$

Mas chamando β o arco interceptado pelo angulo α, é evidente que aos angulos centraes $\alpha + \alpha$ ou 2α, $2\alpha + \alpha$ ou 3α, $3\alpha + \alpha$ ou 4α, $4\alpha + \alpha$ ou 5α corresponderão respectivamente os arcos $\beta + \beta$ ou 2β, $2\beta + \beta$ ou 3β, $3\beta + \beta$ ou 4β, $4\beta + \beta$ ou 5β...

Ora, por hypothese, os arcos que correspondem aos angulos centraes 3α ou a e 5α ou a' são b e b', ter-se-ha pois

$$b = 3\beta \quad e \quad b' = 5\beta$$

d'onde resulta que

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'} \qquad (14\ a)$$

162 — Instituição geral das condições de proporcionalidade; sua applicação á medida dos angulos. — I. O raciocinio que precede não se applica sómente aos angulos centraes e aos arcos que elles interceptam; permitte ainda demonstrar de uma maneira geral este importante theorema:

Duas grandezas são proporcionaes, quando a dois valores quaesquer, porém iguaes, da primeira correspondem dois valores iguaes da segunda; e além disto si á somma de dois

---

(14 a) Rouché et de Comberousse — Traité de Géométrie.

valores quaesquer da primeira corresponder um valor que seja a somma de dois valores correspondentes da segunda.

Com effeito, sejam a e a' dois valores quaesquer da primeira grandeza, b e b' os dois valores correspondentes da segunda. Supponhamos que a relação $\frac{a}{a'}$ seja por exemplo $\frac{3}{5}$, isto é, que a seja os $\frac{3}{5}$ de a'. Designando por α o quinto de a', ter-se-ha então

$$a = 3\alpha \quad \text{e} \quad a' = 5\alpha$$

Mas chamando β o valor da segunda grandeza, que corresponde ao valor α da primeira, é claro que aos valores

$$\alpha + \alpha \text{ ou } 2\alpha,\ 2\alpha + \alpha \text{ ou } 3\alpha,\ 3\alpha + \alpha \text{ ou } 4\alpha,\ 4\alpha + \alpha \text{ ou } 5\alpha$$

da primeira grandeza correspondem respectivamente, em virtude da lei de correspondencia admittida, os valores

$$\beta + \beta \text{ ou } 2\beta,\ 2\beta + \beta \text{ ou } 3\beta,\ 3\beta + \beta \text{ ou } 4\beta,\ 4\beta + \beta \text{ ou } 5\beta \ldots$$

da segunda grandeza. Ora, como por hypothese os valores da 2.ª grandeza, que correspondem aos valores 3α ou a e 5α ou a' da primeira, são b e b'; ter-se-ha pois

$$b = 3\beta,\ b' = 5\beta$$

donde se segue que

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

Si a relação $\frac{a}{a'}$ for incommensuravel, chamando $\frac{k}{n}$ e $\frac{k+1}{n}$

dois valores aproximados desta relação, com aproximação de $\frac{1}{n}$, um por falta e outro por excesso, ter-se-ha

$$\frac{k}{n} a' < a < \frac{k+1}{n} a';$$

donde, designando por α a n^{ma} parte de a', virá $K\alpha < a < (K+1)\alpha$ e $a' = n\alpha$. Mas, si designarmos por β o valor de B que corresponde ao valor α de A, é obvio que aos valores $k\alpha$, $(k+1)\alpha \ldots n d$ de A, corresponderão respectivamente os valores $k\beta$, $(k+1)\beta \ldots$, $n\beta$, de B. E como a um maior valor de A corresponde necessariamente um maior valor de B, ter-se-ha, portanto,

$$k\beta < b < (k+1)\beta \quad \text{e} \quad b' = n\beta,$$

isto é

$$\frac{k}{n} b' < b < \frac{k+1}{n} b' \text{ ou } \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

Por conseguinte, as duas relações $\frac{a}{a'}$ e $\frac{b}{b'}$ estando comprehendidas entre dois numeros, $\frac{k}{n}$ e $\frac{k}{n} + \frac{1}{n}$, que para n assaz grande differem tão pouco quanto se queira, não poderão ter nenhuma differença assignalavel.

II. Reciprocamente, *se as duas grandezas proporcionaes;* 1.º a relação $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ mostra que para $a = a'$ se tem $b = b'$, isto é, que *a valores iguaes da primeira grandeza, correspondem valores iguaes da segunda;* 2.º a *mesma relação nos* dá $\frac{a+a'}{a'} = \frac{b+b'}{b'}$, isto é, *que á somma de dois valores quaesquer da primeira grandeza, corresponde a somma de dois valores correspondentes da segunda.*

Em resumo, *correspondencia na igualdade e correspondencia na somma, taes são as duas condições geraes necessarias e bastantes á proporcionalidade de duas grandezas.*

Si sómente uma destas condições fôr preenchida *não haverá proporcionalidade.* E' o que acontece com um arco de circulo e sua corda: a arcos iguaes de um mesmo circulo, correspondem cordas iguaes, mas a corda da somma de dois arcos é menor que a somma das cordas destes arcos. Assim, pois, não ha proporcionalidade entre os arcos e as cordas, visto como a segunda condição não é preenchida, embora o seja a primeira.

Inversamente, vê-se que as cordas não são proporcionaes aos angulos centraes correspondentes, de sorte que não se pode por isto medir os angulos por meio de linhas rectas (14 b).

Ao contrario, o concurso das duas condições de proporcionalidade permitte medir os angulos centraes por meio dos arcos de circulo correspondentes. Não se poderia obter essa proporcionalidade por meio de nenhuma outra curva a não ser o circulo, e quando mesmo a suppusessemos, ella ficaria esteril para a medida dos angulos, cuja comparação directa seria então mais facil que a de taes arcos.

III. Mas, sendo ligada por sua natureza á uniformidade circular, a medida dos angulos não offerece embaraços no caso fundamental em que o vertice se acha no centro.

Com effeito, consideremos dois angulos *centraes* A O B e A O C (Fig. 181), e supponhamos que se trata de medir este ultimo. Attendendo que a razão dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ é a mesma que a destes angulos, teremos

$$\frac{AOC}{AOB} = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}}.$$

(14 b) A apreciação geometrica da proporcionalidade foi instituida entre os gregos pela escola de Pythagoras. O estudo das principaes propriedades da linha recta e do circulo, já realizado em parte pelo grande Thales, permittiu que os seus successores immediatos completassem a doutrina da proporcionalidade, donde surgiu a theoria das proporções, incontestavel origem concreta da algebra dos modernos.

Ora, tomando para unidade de angulo, A O B, e para unidade de arco o correspondente $\widehat{AB}$, será evidentemente

$$\frac{AOC}{1} = \frac{\widehat{AC}}{1},$$

onde se vê que a primeira relação é igual ao numero que mede A O C, e a segunda é igual ao numero que mede o arco $\widehat{AC}$. Portanto, no systema adoptado, o numero que mede o angulo A O C é o mesmo que mede o arco $\widehat{AC}$, de sorte que os arcos como este são a medida natural dos angulos centraes que lhes correspondem. Como esta propriedade é de um uso muito frequente, se diz abreviadamente que *um angulo tem por medida o arco de circulo comprehendido entre os seus lados e descrito do seu vertice como centro.*

Esta expressão parece á primeira vista obscura, porquanto só se podem medir grandezas directamente por meio de outras da mesma especie, o que se não verifica para o arco e o angulo. Pode-se evitar este inconveniente, dizendo-se simplesmente que *o angulo central tem a mesma medida que o arco comprehendido entre os seus lados.*

E' claro que se deve sempre subentender a condição relativa á correspondencia das unidades, isto é, que o arco é tomado para unidade, bem como o angulo que corresponde a este arco, de sorte que o enunciado acima resume o seguinte:

Todo angulo contém tantas vezes um certo angulo arbitrario, tomado para unidade ou por termo de comparação, quantas o arco comprehendido entre os seus lados e descrito do seu vertice como centro contem o arco do mesmo circulo tomado para unidade, comprehendido entre os lados desse segundo angulo e tambem descrito do seu vertice como centro.

Isto mostra que os arcos de circulo apenas são introduzidos para servirem de termos de comparação, e que para achar a razão numerica de dois angulos quaesquer se deverá

procurar, pelo processo indicado no numero precedente, a dos dois arcos descritos dos seus vertices como centros, e com um raio arbitrario, porém o mesmo para ambos.

Já vimos que o angulo adoptado para servir de unidade é o *angulo recto*. Este angulo comprehende evidentemente, entre os seus lados, o quarto da circunferencia, isto é, o arco de 90.°. Teremos, portanto, a medida de um angulo, comparando o arco comprehendido entre os seus lados com aquelle que na mesma circunferencia intercepta o angulo recto que tem o vertice no centro, tomado para unidade.

163 — Tendo apreciado o caso fundamental em que os lados do angulo a medir são raios do circulo, examinemos successivamente como se pode por meio delle proceder á estimação de todos os angulos cujos dois lados attingem a circunferencia da curva de uma maneira qualquer.

I. Em primeiro lugar examinemos a hypothese em que *o vertice do angulo se acha sobre a circumferencia, sendo elle formado por duas cordas*. Diz-se, então, que o angulo é *inscrito*, e vamos mostrar que *elle tem por medida a metade do arco comprehendido entre os seus lados.*

1.° Si um dos lados A D do angulo C A D (Fig. 182) passa pelo centro O, tirando a recta O E parallela á A C, e prolongando-a em sentido opposto até F, a questão fica reduzida ao caso fundamental; porque o angulo D O E ou o seu igual A O F, como verticalmente oppostos, têm o vertice no centro.

Portanto, $\overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{AF}$, como arcos que medem angulos iguaes; mas, tambem $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AF}$, como arcos comprehendidos entre cordas parallelas: logo $\overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CE}$. Assim, pois, o ponto E é o meio do arco C D, e o angulo E O D, ou seu igual C A D, tem por medida $\overset{\frown}{ED}$; isto é, a metade do arco C D, comprehendido entre seus lados.

2.° Si o centro do circulo ficar entre os lados do angulo inscrito B A C (Fig. 182), tirando o diametro A D, os angulos B A D e D A C tendo por medida as metades de $\overset{\frown}{BD}$ e de $\overset{\frown}{DC}$,

conforme o caso precedente, vê-se que a somma destes arcos, ou a metade do arco B C D, será a medida do angulo considerado B A C.

3.º Si o centro O ficar exterior ao angulo, como para G A B (Fig. 182) tirando ainda o diametro A D, tem-se do mesmo modo $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{GD}$ e $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BD}$ para medida dos angulos GAD e BAD (1.º); de sorte que, tomando a differença entre estes dois arcos, se acha ainda $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{GB}$ para a medida do angulo proposto G A B, que é igual á differença entre aquelles.

4.º Mesmo quando um dos lados se torna tangente ao circulo, a regra precedente não soffre alteração. Assim, consideremos o angulo T A B (Fig. 182), formado pela tangente A T e pela corda A B. Tirando pelo centro O a recta O I parallela a A T e do vertice A o diametro A D, vê-se então que sendo este perpendicular sobre A T, o angulo $TAD = IOD$ terá por medida o quadrante A I, ou a metade do arco A I D. Ora, a medida de B A D sendo como vimos $\frac{1}{2}$ de $\overset{\frown}{BD}$, resulta que a differença entre a metade de $\overset{\frown}{AID}$ e a de $\overset{\frown}{BD}$, isto é $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$ serve de medida do angulo T A B: *a metade do arco que a corda subtende no interior do angulo proposto é, pois, a medida deste.*

Si considerarmos o angulo obtuso T A C, bastará notar que elle é a somma do angulo recto T A D e do angulo inscrito D A C: a sua medida será pois $\frac{\overset{\frown}{AID}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AIC}}{2}$.

5.º Emfim, si *o angulo proposto é formado por uma corda* A B, *e o prolongamento de uma outra* A F, tal como F′ A B (Fig. 182), é facil de ver que *é medido pela semi-somma dos arcos* F H A e A C B, *subtendidos pelas duas cordas.* Porque, a somma dos angulos adjacentes B A F′ e B A F vale dois rectos, e portanto a somma de suas medidas é uma semicircunferencia: Ora, o angulo inscrito F A B tem por medida

metade do arco F B, comprehendido entre os seus lados; portanto, subtrahindo esta metade de uma circunferencia, teremos evidentemente a medida do angulo BAF′. Mas subtrahir $\frac{1}{2}$ de $\overparen{FB}$ de uma circunferencia, importa sem duvida em subtrahir $\overparen{FB}$ da circunferencia inteira, e tomar a metade do resto F H A C B: Assim, pois, concluimos que o angulo B A F′ tem por medida $\frac{1}{2}\left(\overparen{FH} + \overparen{ACB}\right)$, isto é, a semi-somma dos dois arcos F H A e A C B. O angulo formado por uma corda com o prolongamento da outra contigua, é por muitos denominado *ex-inscrito.*

II. Examinemos agora o caso em que o vertice do angulo está dentro ou fora do circulo, sendo elle formado por duas secantes, ou mesmo por duas tangentes. Nesta hypothese é facil de verificar que *o angulo excentrico* (cujo vertice não se acha no centro) *tem por medida a semi-somma ou a semi-differença dos arcos comprehendidos entre os seus lados e os prolongamentos destes, conforme o vertice está dentro ou fora do circulo.*

1.º No 1.º caso, em que o vertice do angulo está dentro do circulo, como o ∧ B A C (Fig. 183) prolongando B A até E e C A até D, é facil de ver que sua medida é $\frac{1}{2}\left(\overparen{BC}+\overparen{DE}\right)$. Porque traçando a corda B D, e considerando o triangulo B A D será o angulo externo B A C = B D A + D B A = $= \frac{1}{2}\overparen{BC} + \frac{1}{2}\overparen{DE} = \frac{1}{2}\left(\overparen{BC} + \overparen{DE}\right)$, em virtude do que ficou dito para os angulos inscritos.

2.º No 2.º caso, em que o vertice do angulo está fora do circulo, como B A′ C, sua medida é $\frac{1}{2}\left(\overparen{GF} - \overparen{BC}\right)$(Fig. 183). Porquanto traçando a corda F C, e considerando o triangulo A′F C, vê-se que o angulo externo G C F = B A′ C + B F C: Logo,

$$BA'C = GCF - BFC = \frac{1}{2}\overparen{GF} - \frac{1}{2}\overparen{BC} = \frac{1}{2}\left(\overparen{GF} - \overparen{BC}\right).$$

Neste caso chama-se $\widehat{BC}$ o arco *convexo* e $\widehat{FG}$ o arco concavo, da circunferencia, relativamente á posição do vertice A'.

3.º Mesmo no caso em que as duas secantes se tornam tangentes, a conclusão que precede é verdadeira. Com effeito, o angulo H A' L (Fig. 183) que se chama *circumscrito*, tem tambem por medida a semi-differença dos arcos HDI e HBI; porque, chamando *a* este arco, e portanto C — *a* aquelle, será $\frac{C-a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c}{2} - a$, a medida do angulo proposto, visto como si imaginarmos que as duas secantes A' F e A' G, girando em torno do ponto A', se convertem em tangentes, a propriedade precedente não deixa de subsistir.

Aliás, a medida do angulo circunscrito pode ser verificada especialmente, bastando para isto tirar as duas *normaes* relativas ás tangentes A' H e A' I: Como estas normaes concorrem no centro O, formar-se-ha o quadrilatero A' H O I, cujos angulos oppostos A' e O são como vimos supplementares. Assim pois, $\wedge$ H A' I + $\wedge$ H O I = 2 $\wedge$ rectos, donde resulta que $\wedge$ H A' I = 2 $\wedge$ rectos — H O I, e como o angulo central H O I tem por medida o arco H B I ou *a*, conclue-se finalmente que será $\frac{C}{2} - a$ a medida do angulo proposto.

Observemos, emfim, que estas diversas medidas dos angulos excentricos devem ser consideradas como sendo secundarias, e sómente tendo por objecto estabelecer as relações que existem entre elles e os angulos centraes, unicos verdadeiramente importantes; porque a medida natural de um angulo é sempre o arco comprehendido entre os seus lados, e descrito do seu vertice como centro.

164 — As propriedades precedentes permittem deduzir immediatamente algumas consequencias uteis.

1.ª Em relação a qualquer angulo com vertice sobre a circunferencia, notemos a principio que *todos aquelles inscritos no mesmo arco* A B C (Fig. 184), *isto é, que têm os seus verti-*

ces sobre este, e cujos lados passam sempre por suas extremidades A e C, *são necessariamente iguaes*, visto como têm elles por medida a metade de um mesmo arco A M C, complemento da circunferencia inteira, comprehendido entre seus lados. Estão, por exemplo; neste caso os angulos A B C, A D C, A E C...

Dahi resulta que *todo angulo inscrito num semi-circulo é necessariamente recto*; porquanto qualquer que elle seja tem sempre por medida a metade da semi-circunferencia, isto é, um arco de 90°. E' o que se verifica, por ex., no angulo A B D (Fig. 185).

2.ª Acabamos de ver que são iguaes todos os angulos inscritos num mesmo segmento do circulo, chamando-se *segmento* a qualquer porção da curva, comprehendida entre um arco e a respectiva corda. Dahi resulta evidentemente *a igualdade de todos os angulos que se formam juntando dois pontos fixos quaesquer da circunferencia, a todos os outros.* Em consequencia desta propriedade, *o circulo pode ser engendrado pelo movimento de um angulo invariavel, em torno de dois pontos fixos ou polos, que ficam diametralmente oppostos quando o angulo é recto.*

Assim, si o angulo A B C (Fig. 185), de grandeza fixa, se mover de maneira que seus lados passem incessantemente um em A, o outro em C, occupando o seu vertice B as posições successivas B, B′, B″..., elle descreverá evidentemente a circunferencia.

3.ª Concebido como engendrado pelo movimento de um angulo invariavel, manifesta o circulo as mais importantes noções ligadas á theoria da linha recta. Assim é, por exemplo, que tomando as medidas dos angulos em A, em B e em C (Fig. 185), obtem-se immediatamente:

$$\frac{1}{2}\,B\widehat{M}C + \frac{1}{2}\,A\widehat{N}C + \frac{1}{2}\,\widehat{AB} = \frac{1}{2}\left(B\widehat{M}C + A\widehat{N}C + \widehat{AB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,C = 2 \wedge \text{rectos};$$

onde se vê que *a somma dos angulos do triangulo A B C vale meia circunferencia, ou dois angulos rectos.*

Chegar-se-ia a este mesmo resultado prolongando a corda B A, e sommando a medida do angulo ex-inscrito C A X com a do angulo inscrito B A C, o que daria:

$$\frac{1}{2}\left(A\widehat{N}C + \widehat{AB}\right) + \frac{1}{2}B\widehat{M}C = \frac{1}{2}\left(A\widehat{N}C + \widehat{AB} + B\widehat{M}C\right) =$$

$$\frac{1}{2}C = 2 \wedge \text{rectos};$$

de sorte que *a medida do angulo ex-inscrito equivale á somma dos arcos que medem os angulos inscritos não adjacentes.*

4.ª Em relação a qualquer angulo excentrico, de vertice exterior ao circulo, cumpre notar que prolongando os lados até a outra parte da circunferencia, *os segmentos exteriores de taes secantes são inversamente proporcionaes a ellas.* Isto é, considerando por exemplo, o angulo A E C (Fig. 186) formado pelas duas secantes E B e E D, teremos a proporção

$$AE : DE :: CE : BE$$

na qual uma das secantes e a sua parte exterior formam os meios e a outra secante e sua parte exterior formam os extremos. Com effeito, tirando as cordas A D e B C, se formam os triangulos E A D e E C B, que são similhantes, porque têm o angulo em E commum, e dois angulos respectivamente iguaes, a saber: $\wedge ADC = \wedge ABC$, por terem o vertice na circunferencia e descansarem sobre o mesmo arco A C. Comparando os seus lados homologos, chega-se á proporção

$$AE : DE :: CE : BE \qquad (1)$$

que faz o objecto da proposição.

5.ª Si concebermos que a secante E C D (Fig. 186) gira em

torno do ponto E, adiantando-se para F afim de se desembaraçar do circulo, os pontos C e D aproximar-se-hão continuamente, e a differença entre a secante e a sua parte exterior se tornará cada vez menor; e como nem por isto a proposição acima deixa de ser verdadeira, pode-se concluir que terá lugar quando esta differença fôr nulla, isto é, quando a linha C E tornando-se a tangente E F, a parte exterior vier a ser igual á linha inteira. Neste caso será:

$$AE : EF :: EF : BE$$

proporção que nos ensina que *a tangente E F é media proporcional entre a secante B E, e a sua parte exterior A E.*

Esta proposição pode tambem ser demonstrada *a priori* da maneira seguinte: Tendo tirado as cordas A F e B F (Fig. 186) formamos os triangulos A E F e B E F, nos quaes o angulo E é commum, e os angulos E B F e E F A são iguaes, porque têm o vertice na circunferencia, e se apoiam sobre o mesmo arco A F. A comparação dos seus lados homologos dará:

$$AE : EF :: EF : BE \qquad (2)$$

6.ª Em relação a qualquer angulo excentrico, com o vertice no interior do circulo, prolongando os seus lados, verifica-se que as duas cordas A B e C D (Fig. 187) que se encontram no vertice, ficam tambem divididas em partes reciprocamente proporcionaes. Isto é

$$AE : DE :: CE : BE$$

de sorte que $AE \times BE = DE \times CE$, ou, *o producto dos dois segmentos de uma, equivale ao producto dos dois segmentos da outra.*

Com effeito, tirando as cordas A C e B D, formam-se os triangulos A E C e B E D que são similhantes por terem dois

angulos respectivamente iguaes, a saber: $\wedge ACD = \wedge ABD$, que têm o vertice na circunferencia e que descansam sobre o mesmo arco AD, e o angulo AEC igual ao angulo BED, como verticalmente oppostos. Comparando os seus lados homologos, tem-se a proporção

$$AE : DE :: CE : BE \qquad (3)$$

que faz o objecto da proposição.

7.ª E' facil reconhecer que esta 6.ª proposição, bem como a 5.ª e a 4.ª, são apenas três casos particulares de um theorema geral, que pode ser enunciado desta maneira: *O producto das distancias de um ponto qualquer no plano de um circulo a duas partes deste é sempre constante, qualquer que seja a direcção em que ellas forem medidas.* Com effeito, tomando as proporções (1), (2) e (3), obtem-se immediatamente

$$AE \times BE = DE \times CE,$$
$$AE \times BE = EF \times EF,$$
e
$$AE \times BE = DE \times CE,$$

onde se vê que o producto das distancias $EA \times EB$ ou $ED \times EC$ ou $EF \times EF$, de qualquer ponto E, dentro ou fora do circulo, a dois pontos da circunferencia, em linha recta com o primeiro, é um numero constante, qualquer que seja a direcção da recta.

E note-se que este theorema é verdadeiro, mesmo no caso em que o vertice E se acha sobre a circunferencia. Assim, considerando as cordas AF e FC (Fig. 187), é facil de verificar que o producto $AF \times FC$ é sempre constante, qualquer que seja a posição do ponto F sobre a circunferencia.

Com effeito, tomemos o meio G do arco AC, e unamos o ponto G ao ponto F, e o ponto A ao ponto C, pelas rectas GF e AC, que se cortam no ponto H. Traçando a recta AG, formaremos evidentemente dois triangulos GAF e

CFH, que são similhantes por terem dois angulos respectivamente iguaes, a saber: $\wedge AGF = \wedge HCF$ por terem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AF}$; e $\wedge AFG = \wedge GFC$ por terem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AG} = \frac{1}{2}\widehat{GC}$.

Da similhança destes triangulos deduz-se: $AF : HF :: GF : CF$, visto como os terceiros angulos HCF e GAF são tambem iguaes. Desta proporção resulta immediatamente que $AF \times CF = HF \times GF$, onde se vê que effectivamente o producto das duas cordas AF e CF é constantemente igual á corda bissectriz GF, multiplicada pelo segmento determinado sobre ella pela corda AC, que junta as extremidades das duas primeiras, no triangulo assim formado. Desta proposição poder-se-ia deduzir as relações estabelecidas no fim do § 9.º, entre o producto de dois lados de um triangulo, e o quadrado da bissectriz do respectivo angulo, ou do seu exterior (Rouché et de Comberousse).

Eis aqui outra expressão, muitas vezes util, do producto de dois lados de um triangulo: *O producto de dois lados BE e EC de um triangulo, é igual ao producto do diametro ED do circulo circumscrito, pela altura EA relativa ao terceiro lado* (Fig. 188).

Com effeito, a relação a demonstrar

$$EB \times EC = ED \times EA \qquad (4)$$

ou

$$EB : ED :: EA : EC,$$

resulta immediatamente da similhança dos dois triangulos rectangulos EBD e EAC, cujos angulos agudos D e C são iguaes como inscritos num mesmo segmento.

Consequencia. Este theorema permitte calcular o raio R do circulo circumscrito a um triangulo, por meio dos três lados deste. Basta para isto substituir na igualdade (4)

$$bc = 2R \times EA$$

a altura $\overline{EA}$ pela sua expressão já obtida no n.º (105), suppondo aqui $c = b$, $b = a$, e $a + b + c = 2p$; o que dará então

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Nota. Emfim, o segundo theorema cujas consequencias temos apreciado, nos explica ainda a origem de uma curva celebre na historia da *geometria*; referimo-nos á *cissoide*, imaginada por Diócles, para servir á solução do famoso problema da *duplicação do cubo*.

Para concebel-a basta imaginar que de um ponto fixo A da circunferencia de um circulo O (Fig. 189) se tira uma infinidade de secantes, terminadas na tangente traçada no ponto B, diametralmente opposto a A; e que sobre cada secante tal como A C D, se toma a partir do ponto A, um comprimento A M, igual á porção C D da secante, comprehendida entre o circulo e a sua tangente. *O lugar das posições successivas do ponto M, será a cissoide, que póde portanto ser caracterizada pela igualdade e* $AM = CD$.

165. Guiando-nos pelas propriedades do circulo, podemos chegar a muitas noções importantes, inteiramente ligadas á theoria da linha recta.

I. Entre estas noções sobresaem as que se referem á construcção de uma media proporcional entre duas linhas dadas, que surge novamente na theoria do circulo, onde é completada, generalizada e resumida pelo theorema citado no numero precedente. Com effeito, suppondo que a corda A B (Fig. 190) passe pelo centro, ou venha a ser um diametro, e que a corda C D lhe seja perpendicular, já vimos que esta ultima será cortada em duas partes iguaes, isto é, $DE = CE$. Mas, pelo theorema precedente, o producto dos dois segmen-

tos de uma corda deve ser igual ao producto dos dois segmentos da outra, de sorte que virá

$$AE \times BE = CE \times DE, \text{ ou } AE \times BE = CE \times CE$$

ou

$$AE : CE :: CE : BE,$$

onde se vê que a recta CE é *media proporcional* entre as partes AE e BE do diametro AB.

Daqui se segue, que *para se achar uma media proporcional entre duas rectas dadas M e N, basta juxtapol-as, e descrever sobre a sua somma AB como diametro, um circulo; e levantar no ponto E, em que se unem, a perpendicular EC, que será a media proporcional pedida.* Esta recta EC chama-se tambem *ordenada do diametro.*

Observação. A perpendicular CE não sendo tão grande em qualquer outro lugar, como no caso em que passa pelo centro O, jamais o seu quadrado será maior do que nessa hypothese, e em taes condições, de todos os productos que podem ser formados com as partes do diametro AB, o maior é $AO \times OB$, que tem lugar quando estas partes são iguaes. Esta conclusão permitte resolver o problema seguinte: *Como decompor uma quantidade dada em duas partes taes que o seu producto seja o maior possivel, isto é, o maximum?*

Acabamos de vêr que essas duas partes devem então ser iguaes; e as demonstrações desta especie, em que se chega a uma conclusão sem ter em vista obtel-a, são denominadas *a posteriori*, para distinguil-as das demonstrações *a priori*, onde não se chega ao resultado por um acaso, e raciocinando sobre outro assumpto.

Esta propriedade pode, entretanto, ser demonstrada *a priori*. Com effeito, seja a a quantidade proposta, x e portanto $a - x$ as suas partes. E' evidente, a principio, que o *maximum* do producto $x(a - x)$ não pode ter lugar sinão quando o valor de x fôr de uma grandeza comprehendida en-

tre zero e a, visto como nos seus dois estados extremos, $x = 0$ e $x = a$, aquelle producto torna-se nullo.

Em segundo lugar, não é menos claro que si x passar crescendo continuamente do valor 0 ao valor a, o producto $x(a - x)$ passará do valor 0 para o valor 0, e que por conseguinte, diminuirá numa parte do percurso, ao passo que crescerá na outra: Isto faz suppor que elle passa duas vezes por cada um dos valores que recebe, a saber: uma crescendo, e outra diminuindo; a menos que não se julgue possivel que emquanto x varia continuamente de 0 a a, o producto $x(a - x)$ deixe intervallos entre seus valores, e cresça ou diminua descontinuamente de uns para outros. Para mostrar que isto não é possivel, supponhamos que se procura o accrescimo do producto $x(a - x)$, que corresponde a um accrescimo qualquer e da variavel x. Achar-se-ha para tal accrescimo $(x + e)(a - x - e) - x(a - x) = e(a - 2x - e)$. Este producto leva a concluir que si os accrescimos de x, designados por e, são menores que toda grandeza dada, as variações correspondentes, $e(a - 2x - e)$ do producto $x(a - x)$, são tambem menores que qualquer grandeza dada, por menor que seja; e que assim, emquanto x passa do valor 0 ao de a, por todos os graus de grandeza intermediaria, o producto $x(a - x)$ não offerece solução de continuidade de 0 a 0, por onde passa a principio crescendo continuamente, e depois decrescendo: De sorte que *antes e depois do seu maximum, este producto recebe dous valores correspondentes e iguaes.*

Mas, observemos que esses valores iguaes e conjugados, de um e de outro lado do *maximum* de $x(a - x)$, se aproximam deste *maximum* á medida que crescem a partir de 0, vindo emfim, de um e de outro lado, se confundir com elle. Dahi resulta que si consideramos $x(a - x)$ como a expressão geral de todos os valores que desde 0 precedem o *maximum* do producto das partes de a, e tomamos $(x + e)(a - x - e)$ para exprimir todos os valores que seguem este *maximum*, vê-se que a cada valor de x, corresponderá um certo valor de

$x + e$, tal que $x(a - x) = (x + e)(a - x - e)$, o que fará suppôr sua differença nulla, $ae - 2ex - e^2 = 0$, ou $a - 2x - e = 0$, e finalmente $2x = a - e$.

Ora, observemos que no caso do *maximum*, os valores bilateraes de $x(a - x)$ e $(x + e)(a - x - e)$, se veem confundir com este *maximum*; e assim, em tal circunstancia, a grandeza de e desapparece, o que dá á equação geral $2x = a - e$, a fórma particular $2x = a$, ou $x = \frac{a}{2}$, onde se vê que o *maximum* do producto das partes de a tem lugar, quando estas são iguaes entre si, tal como concluimos *a posteriori*.

II. Tirando as cordas AC e CB, será recto o angulo ACB como inscrito num semicirculo, e por conseguinte será rectangulo o triangulo que elle ahi forma com o diametro AB (Fig. 190). Este triangulo é similhante a ACE, pois que têm respectivamente dois angulos iguaes: o angulo recto e $\wedge ABC = \wedge ACE$, como tendo por medida metade de arcos iguaes (isto é, $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AD}$, por isto que sendo o diametro AB perpendicular a CD, divide esta corda ao meio, bem como o respectivo arco).

Da comparação dos lados homologos dos dois triangulos, resulta a proporção

$$AE : AC :: AC : AB \qquad (5)$$

da qual se infere que *a corda tirada pelo extremo de um diametro é media proporcional entre o diametro inteiro e o segmento determinado sobre elle pela perpendicular baixada do outro extremo da corda.* Por este meio se pode tambem achar uma media proporcional entre duas rectas dadas, tomando a maior para o diametro AB, applicando a segunda de A para E, levantando a perpendicular EC, e tirando a corda AC, que conforme fica dito, será a media proporcional pedida.

Observação. 1.ª Comparando ainda o triangulo ABC com

o triangulo B C E, vê-se que tambem são similhantes por terem, alem do angulo recto igual, $\wedge BAC = \wedge BCE$, visto serem medidos respectivamente pelas metades dos arcos iguaes $\widehat{CB}$ e $\widehat{BD}$. Dahi resulta a proporção

$$BE : BC :: BC : BA; \qquad (6)$$

das proporções (5) e (6) deduz-se

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE} \times \overline{AB}$$

e

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE} \times \overline{AB};$$

donde se tira

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AB\ (AE + BE),$$

ou emfim

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

que é a lei theocratica já obtida para o triangulo rectangulo.

Vê-se assim que o officio angular do circulo o torna apto a condensar as duas principaes equações, que foram deduzidas na primeira parte do preambulo geometrico, isto é, uma para a somma dos angulos de todo triangulo rectilineo, a outra entre os três lados do triangulo rectangulo.

Observação. 2.ª Tirando as cordas A C e A F, . . ., e baixando dos seus extremos C e F . . . as perpendiculares C E e F G . . . (Fig. 190) sobre o diametro A B, é facil de mostrar que as segundas potencias dos comprimentos destas cordas são proporcionaes aos segmentos A E e A G . . . determinados sobre o diametro. Com effeito, acabamos de vêr que as cordas A C e A F . . ., são respectivamente medias proporcionaes

entre o diametro A B e cada um dos segmentos correspondentes A E, A F..., portanto, ter-se-ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}, \text{ e } \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AG}, \text{ etc.} \qquad (7)$$

donde se conclue

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: AB \times AE : AB \times AG,$$

ou omittindo o factor commum A B da segunda razão:

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 : AE : AG$$

e assim por diante.

Os segundos membros das igualdades (7) sendo sempre constantes, qualquer que seja a posição dos pontos C, F..., sobre a circunferencia, resulta que sommando-as duas a duas, e comparando os resultados, obtem-se sempre uma somma constante: Isto nos leva ainda a *definir o circulo como sendo o lugar dos pontos cuja somma dos quadrados das distancias a diversos pontos fixos de um plano é sempre constante.*

Reciprocamente, *o lugar geometrico de todos os pontos cuja somma dos quadrados das distancias a dois pontos fixos, no mesmo plano, fica constante, é uma circumferencia de circulo, cujo centro é o meio da recta que une estes dois pontos.*

Com effeito, supponhamos uma serie de pontos B, B′, B″,..., taes que se tenha sempre para o quadrado de suas distancias a dois outros fixos A e D (Fig. 185), a relação $a^2 + d^2 = K^2$, sendo K um numero inteiro qualquer. Para verificar que o lugar geometrico de similhantes pontos é a circunferencia do circulo que tem para centro o meio O da recta A D tomemos um qualquer daquelles pontos, B″ por exemplo, e tiremos as rectas B″A, B″D e B″O, mediana relativa ao lado *b* do triangulo A B″ D. Tudo se reduz a mostrar que

$B''O = AO = DO = \frac{b}{2}$, metade do lado opposto ao angulo B'' no triangulo considerado. Ora, este decompõe-se nos triangulos AOB'' e DOB'', onde um dos angulos em O é necessariamente obtuso, ao passo que o outro é agudo. Suppondo que seja obtuso AOB'', teremos (105):

$$a^2 = m^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{2\,b^2}{4} \times OP;$$

sendo agudo o angulo DOB'', virá tambem (105)

$$a^2 = m^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{2\,b^2}{4} \times OP.$$

Sommando esta igualdade com a precedente, teremos:

$$a^2 + d^2 = 2\,m^2 + \frac{2\,b^2}{4}$$

ou

$$a^2 + d^2 = 2\left(\frac{b^2}{4} + m^2\right)$$

onde se vê que *a somma dos quadrados de dois lados de um triangulo é igual ao dobro do quadrado da mediana que lhe é relativa*, propriedade já demonstrada no fim do § 9.º (2.ª das applicações).

Comparando a igualdade precedente com a relação dada, $a^2 + d^2 = K^2$, vemos que $K^2 = 2\frac{b^2}{4} + 2\,m^2$, onde suppondo $K = b$, vê-se que $b^2 = 2\frac{b^2}{4} + 2\,m^2$, ou $b^2 = \frac{b^2}{2} + 2\,m^2$, ou ainda $2\,m^2 = b^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{2\,b^2 - b^2}{2} = \frac{b^2}{2}$; donde $m^2 = \frac{b^2}{4}$ e, portanto, $m = \frac{b}{2}$.

Assim pois, $B''O = AO = DO$, e os pontos A, B'' e D pertencem necessariamente a uma circunferencia de circulo

cujo centro é O. Para ter o raio B'' O deste circulo basta, pois, substituir na relação achada, $a^2 + d^2 = 2\left(\frac{b^2}{4} + m^2\right)$, a somma $a^2 + d^2$ pela constante dada K^2, donde resulta que B'' O ou

$$m = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - b^2}$$

Conclue-se, portanto, que o lugar só existe quando

$$2K^2 > b^2 \text{ ou } K > \frac{\sqrt{2}}{2} b.$$

166. — O problema relativo á construcção da media proporcional pelo segundo processo que indicamos no n.º precedente (II), permitte resolver essa importante questão:

Descrever um circulo que passe por dois pontos dados. C e D (Fig. 191) *e que seja tangente a uma linha recta indefinida A B, dada de posição.*

Solução. Ajuntem-se os pontos D e C por uma recta, que se prolongará até que encontre AB em A, depois tome-se uma *media proporcional* entre AC e AD. Sendo AE esta media proporcional, descreva-se do ponto A como centro e com um raio igual a AE, o arco EF até encontrar em F a recta AB. O ponto F será aquelle em que se deve formar o contacto da recta AB e do circulo pedido. Portanto, poder-se-ha descrever este circulo, por qualquer dos dois processos que temos indicado.

Esta solução justifica-se, observando que a linha AC é uma secante e a questão se reduz a achar sobre AB, a posição do ponto de contacto, no qual se deve ter, conforme vimos,

$$AD : AF :: AF : AC,$$

donde se segue que a distancia AF se obterá tomando uma media proporcional entre AD e AC.

Note-se, emfim, que se poderia levar a linha A E não sómente de A para F, mas do lado opposto em F'; e teriamos assim um segundo circulo que tocaria a recta A B num ponto F' e que passaria pelos pontos D e C.

Si a linha D C fosse parallela a A B, a construcção indicada não faria conhecer o ponto F: mas é visivel que neste caso a perpendicular levantada sobre o meio da corda D C, e que passa pelo centro do circulo pedido, vindo a ser perpendicular á tangente A B, determinaria o ponto de contacto F.

Outro problema. Um outro problema notavel sobre as medias proporcionaes, tambem resolvido pela theoria do circulo, é o que consiste *em dividir uma recta dada A B* (Fig. 192) *em media e extrema razão;* isto é de maneira que se obtenha a proporção

$$AC:BC::BC:AB$$

na qual B C, maior das duas partes da linha A B, é media proporcional entre esta linha e a outra parte A C.

Solução. Levante-se sobre uma das extremidades da recta A B a perpendicular A E, igual á metade desta recta, e tire-se B E. Do ponto E, como centro com o raio A E, descreva-se um circulo A D F; e do ponto B como centro e com um raio igual a B D, descreva-se o arco D C: Este arco, que corta a linha A B no ponto C, a dividirá em media e extrema razão.

Para proval-o, prolongue-se B E até F, e ter-se-ha

$$BD:AB::AB:BF,$$

donde se tira

$$AB-BD:BF-AB::BD:AB.$$

Mas $$AB-BD=AB-BC=AC$$

e como por construcção A E é metade de A B, segue-se que

$$AB = 2AE = FD,$$

donde $$BF - AB = BF - FD = BD = BC,$$

e por consequencia

$$AC : BC :: BC : AB,$$

proporção conforme ao enunciado do problema.

Nota-se finalmente que este problema é susceptivel de duas soluções, porque não só a linha B D (Fig. 192) satisfaz ás condições do enunciado, mas tambem a linha B F, porquanto A B é media proporcional entre B F e B D (14 c).

Outros problemas. — Tomando para base a medida dos angulos rectilineos pelos arcos correspondentes, vamos resolver dez problemas usuaes.

I. *No ponto A da linha A B* (Fig. 193) *fazer um angulo igual ao angulo dado K.*

Solução. Do vertice K, como centro e com um raio arbitrario, descreva-se o arco I L, terminado nos dois lados do angulo dado. Do ponto A como centro, e com raio igual a K I, descreva-se o arco indefinido B O. Tome-se depois um raio igual á corda L I, e do ponto B como centro e com este raio, trace-se um arco que corte em D o arco indefinido B O; tire-se A D e o angulo central D A B será igual ao angulo dado K, porque tem por medida arcos iguaes, isto é do mesmo raio e de cordas iguaes.

Para resolver rapidamente este problema costuma-se empregar um instrumento muito conhecido pelo nome de transferidor (Fig. 194). Consiste este num semi-circulo de cobre, marfim ou chifre cuja semi-circunferencia é dividida em graus e meios graus, e cujo centro é assignalado por um pequeno orificio ou entalhe.

Colloca-se o instrumento de sorte que o seu centro fique

(14 c) Ver nos Apontamentos de Algebra entre os problemas do 2.º grau a discussão dessa questão.

em K, e o seu diametro coincida com KL; em seguida examina-se a que divisão do seu limbo corresponde o lado KL. Supponhamos que seja 39°. Colloca-se depois o transferidor de modo que o seu diametro esteja sobre AB e o centro sobre A, e contam-se 39 divisões a partir do zero: No extremo da 39ª divisão marca-se no papel um ponto M.

Si se levantar o tranferidor e se unir o ponto M ao ponto A, o angulo MAB será igual ao angulo dado IKL, porque ambos têm a mesma medida. Si um dos lados do angulo dado passar entre dois traços consecutivos da divisão do limbo, vê-se aquelle de que mais se aproxima; toma-se então o numero desse traço para indicar o de graus, obtendo-se assim o valor do angulo com um erro menor de meio grau. Nos transferidores modernos existe uma regua movel em torno do centro a qual permitte mais facilmente assignalar os lados do angulo.

II. *Traçar por um ponto uma perpendicular a uma recta que em um dos sentidos não se pode prolongar.*

Solução. — As construcções que temos indicado (§ *13*) suppõem todas que seja sempre possivel marcar na recta dois pontos, dos quaes fique equidistante o ponto dado, mas isto pode não ter lugar quando algum obstaculo material embaraçar o prolongamento da recta. Poderemos recorrer então ás seguintes construcções:

Primeiro caso. — Seja o ponto A, extremo da recta BA, (Fig. 195). Tome-se um ponto O fora da recta, escolhido de maneira que descrevendo de O como centro, com o raio OA um circulo, corte este em dois pontos A e C a linha AB. Trace-se o diametro COD e a recta AD: Será esta a perpendicular, porque o angulo DAC é inscrito no semicirculo, e portanto recto.

Segundo caso. — Seja o ponto A fóra da recta BC (Fig 196). Trace-se por A a obliqua AB no extremo da linha BC. Sobre AB, como diametro descreva-se um circulo que cortará

B C nos pontos B e D: Será A D a perpendicular pela mesma razão que no primeiro caso.

III. *Dividir um angulo A C B num numero qualquer de partes iguaes.*

Solução. — 1.º Si é preciso dividir um angulo em duas partes iguaes (Fig. 197), começa-se por descrever de seu vertice como centro um arco de circulo que encontre seus lados. Em seguida, de cada um destes pontos de encontro e com a mesma abertura de compasso, descrevem-se dois arcos que se cortem; a recta que juntar este ponto de intercepção com o vertice, dividirá o angulo em duas partes iguaes. Procedendo-se do mesmo modo, póde-se por sub-divisões successivas dividir o angulo em 4, 8, 16... 2n partes iguaes.

2.º Para dividir um angulo A O B em tres partes iguaes, trace-se do seu vertice O como centro (Fig. 198) o arco de circulo C A B; conceba-se a linha A F tirada para o prolongamento do diametro B C, de maneira a formar com elle o angulo $F = \frac{1}{3}$ A O B.

Este angulo A O B é exterior ao triangulo A O F, donde resulta que F + F A O = 3 F, e F A O = 2 F. Mas, tirando o raio O D, o triangulo isosceles O A D nos dá F A O = A D O, angulos cuja medida é $\frac{1}{2}\widehat{ABG}$, (sendo o ponto G o extremo do diametro D O G) isto é:

$$\wedge FAO = \frac{2}{1} \wedge AOB + \frac{2}{1} \wedge BOG$$

ou

$$2\ F = \frac{3}{2} F + \frac{1}{2} BOG, \text{ ou emfim:}$$

$$\wedge F = \wedge BOG = \wedge DOF;$$

e o triangulo D O F é isosceles, de sorte que D F é igual ao raio D O do circulo. O problema proposto baseia-se pois em saber tirar a secante A F, de tal maneira que D F, sua parte

exterior ao circulo, seja igual ao raio do mesmo; o angulo F será então o terço do angulo dado AOB, e o arco BG ou CD o terço do arco AB. Mas não se pode simplesmente com a regua e o compasso tirar esta secante AF, e a resolução do problema da trisecção de um angulo exige o auxilio do calculo algebrico só podendo ser recebido aqui por tentativas (14 d).

IV. *Por um ponto dado A, traçar uma parallela á linha BC* (Fig. 199).

Solução. Do ponto A como centro e com um raio sufficientemente grande, trace-se o arco indefinido ED que corte a recta BC no ponto E; deste ponto como centro, e com o mesmo raio, descreva-se o arco AF, tome-se ED = AF e tire-se AD, que será a parallela pedida.

Porque, traçando AE, vê-se que os angulos alternos-internos AEF, EAD são iguaes, por terem a mesma medida; logo, as linhas AD e BC, são parallelas. Já vimos que para resolver este problema, emprega-se as mais das vezes o esquadro.

V. — *Por um ponto dado A, fora da circumferencia de um circulo, traçar uma tangente.*

Solução. Une-se o ponto A (Fig. 200) ao centro C do circulo dado, por meio da linha recta CA em duas partes iguaes, no ponto O; deste ponto como centro, e com o raio OC, descreva-se uma circunferencia que cortará a circunferencia dada nos pontos B e B′, tire-se AB e AB′, e qualquer destas rectas será a tangente pedida. Porque traçando CB e CB′, os angulos CBA e CB′A, inscritos no semi-circulo são angulos rectos; logo AB e AB′ são perpendiculares ao extremo dos raios CB e CB′, e portanto tangentes.

Notemos que neste caso ha duas tangentes sempre iguaes, isto é AB = AB′, passando pelo ponto dado A. São ellas iguaes,

---

(14 d) O problema da trisecção do angulo, tão celebre na antiguidade, resolve-se como veremos, por meio de uma equação trigonometrica do 3.º grau, e a divisão do angulo em 5.7... partes iguaes, exige equações de graus superiores, geralmente insoluveis.

porque os triangulos rectangulos C B A e C B′ A têm a hypotenusa C A commum e o lado C B = C B′, portanto A B = A B′ e ao mesmo tempo o angulo C A B′ = C A B.

VI. — *Sobre uma recta dada A B descrever um segmento circular capaz do angulo dado C; isto é, um segmento tal que todos os angulos nelle inscritos sejam iguaes ao mesmo angulo C.*

Solução. Prolongue-se A B de uma quantidade qualquer até D (Fig. 201); faça-se no ponto B o angulo D B E = C e tiremse B O perpendicular a B E e G O perpendicular ao meio de A B. Do ponto de encontro O como centro, e com um raio igual a O B, descreva-se um circulo; o segmento procurado será A M B. Porque sendo B F perpendicular ao extremo do raio O B é tangente, e o angulo A B F = E B D = C tem por medida metade do arco A K B; demais, o angulo A M B, como angulo inscrito, tambem tem por medida $\frac{1}{2}$ do arco A K B; logo, o $\wedge$ A M B = A B F = C, donde se segue que todos os angulos inscritos no segmento A M B são iguaes ao angulo dado C.

Se o angulo dado fosse recto, o segmento procurado seria o semicirculo descrito sobre o diametro A B.

Esta construcção é muitas vezes empregada, sobretudo quando se trata de formar um triangulo em que se conhecem, entre outros elementos, um lado e o angulo opposto, como nas questões que se seguem.

VII. — *Construir um triangulo A B C* (Fig. 202) *de que se conhece a base* b, *a altura* h *e o angulo B do vertice.*

Solução. Depois de haver traçado A C = b e sua parallela B B′, tirada á distancia H G = *h* de A C, descreva-se sobre A C como corda um segmento capaz do angulo dado B, e os pontos em que B e B′ cortar o circulo, darão para solução os triangulos iguaes A B C e A B′ C.

VIII. — *Tendo tres pontos B, A e C* (Fig. 203), *traçados sobre uma carta, fixar a posição de um grande ponto C′ conhecendo os angulos B C′ C e B C′ A.*

Solução. Descreva-se sobre B C o segmento capaz do angulo B C′ C, do mesmo modo faça-se sobre A B um segmento capaz do angulo B C′ A: O ponto C′ estará na intersecção das duas circunferencias.

Quando uma destas circunferencias passar ao mesmo tempo pelos três pontos A, B e C, conforme a outra estiver ou não no mesmo caso, o problema será indeterminado ou absurdo.

IX. *Construir um triangulo A B C* (Fig. 204) *de que se conhece a base A C, o angulo opposto B e o raio O F do circulo inscrito.*

Solução. Por isso que O A e O C dividem em duas partes iguaes os angulos A e C do triangulo procurado A B C, segue-se que no triangulo A O C o angulo O, supplemento de $OAF + OCF$ ou de $\frac{1}{2}(\wedge A + \wedge C)$ é $\wedge O = 2 \wedge$ rectos $- \frac{1}{2}(A + C)$, e como $A + C = 2 \wedge$ rectos $- B$, se tem $\wedge 0 = 1 \wedge$ recto $+ \frac{1}{2} \wedge B$. O valor do angulo 0 sendo conhecido, só resta determinar o ponto 0 (problema 5), e depois, traçando o circulo E D E que toca A C em F, as tangentes A E e C D completarão o triangulo procurado.

X. *Sendo dado um triangulo A′ B′ C′* (Fig. 205) *e duas circumferencias concentricas A O e C O, construir um triangulo A B C que tenha dois vertices A e B sobre a grande circumferencia e o terceiro C sobre a pequena; e que seja equiangulo com o proposto, isto é,* $A = A'$, $B = B'$ *e* $C = C'$.

Solução. Suppondo construido o triangulo pedido, prolonguemos o lado A C até encontrar de novo em D a grande circumferencia. O angulo A tendo por medida $\frac{1}{2}\widehat{BD}$, si de A como centro e com o raio A O descrevermos o arco E F, será este $\frac{1}{2}\widehat{BD}$. Basta, pois, tomar-se em um lugar qualquer o arco $BD = 2EF$; os lados A B e A C passarão por B e D. Demais,

o angulo B C D sendo o supplemento de C', ter-se-ha o lugar do vertice C descrevendo sobre a corda B D um segmento B C *c* D capaz deste angulo 2 R — C' : a recta B C A dar-nos-ha o ponto A e o triangulo procurado.

O ponto *c* nos dá o triangulo *a* B *c*, que é outra solução do problema ; e como se poderia attribuir á corda B D uma infinidade de situações, resultariam outras tantas soluções duplas.

200 — Resolução graphica dos triangulos ; necessidade da resolução numerica.

1.º *Caso. Sendo dados um lado A B e dois angulos D e E, construir o triangulo.*

Solução. Si o lado fôr adjacente aos angulos D e E, trace-se a linha A B (Fig. 206) igual ao lado dado ; faça-se no ponto A o angulo B A G = D, e no ponto B o angulo A B F = E. A intersecção C dos lados A G e B F determinará os dois outros lados e o terceiro angulo do triangulo, que será portanto A C B.

Si o lado dado A C não fôr adjacente aos angulos D e E, mas sim opposto a um delles, E por exemplo, a questão reduz-se á precedente, determinando previamente o terceiro angulo C do triangulo pedido. Para isto, trace-se a linha indefinida A F (Fig. 207); faça-se no ponto A o angulo C A G = D, e o angulo G A H = E. O angulo restante H A F será o terceiro angulo procurado, porque esses três angulos sommados valem dois angulos rectos.

2.º *Caso. Sendo dados dois lados* B *e* C *de um triangulo, e o angulo A por elles comprehendido, construir o triangulo.*

Solução. Tendo traçado a linha indefinida A E (Fig. 208), faça-se no ponto A o angulo E A F igual ao angulo dado A ; tome-se depois A C = *b* e A B = *c*, e tire-se A B : Será A B C o triangulo pedido.

3.º *Caso. Sendo dados dois lados* A *e* C *de um triangulo, e o angulo C opposto a um delles* C, *descrever o triangulo.*

Solução. Deve-se distinguir dois casos, conforme o angulo C fôr recto, obtuso ou agudo.

Na primeira hypothese, isto é, si o angulo C fôr recto ou obtuso, faça-se o angulo E D F igual ao angulo C (Fig. 209), e tome-se $DE = a$. Do ponto E como centro, e com um raio igual ao outro lado dado c, descreva-se um arco que cortará em F a linha D F; tire-se E F, e D E F será o triangulo pedido.

E' visivel que nesta hypothese é necessario que o lado c seja maior do que a; porque o angulo C sendo recto ou obtuso, é o maior dos angulos do triangulo: Portanto, o lado opposto a elle deve tambem ser o maior.

Na segunda hypothese, isto é, si o angulo C fôr agudo, e si alem disso fôr c maior do que a, terá lugar a mesma construcção, e D E F será o triangulo pedido (Fig. 210).

Mas, si sendo agudo o angulo C, o lado c' fôr menor do que a', o arco descrito do centro E' com o raio $EF = c'$ cortará então o lado D F em dois pontos F e G, situados no mesmo lado que D: Por conseguinte, haverá dois triangulos D E' F e D E' G, que satisfazem igualmente o problema.

Note-se, emfim, que o problema seria impossivel em ambas as hypotheses, si o lado c' fosse menor que a perpendicular baixada de E para a linha D F.

4.° *Caso. Sendo dados os tres lados* A, B *e* C *de um triangulo, descrever o triangulo.*

Solução. Tire-se D E igual ao lado a (Fig. 211); do ponto E como centro, e com um raio igual ao segundo lado b, descreva-se um arco; do ponto D como centro, e com um raio igual ao terceiro lado c, descreva-se um outro arco, que cortará o primeiro em F: Traçando-se D F e E F, será D E F o triangulo pedido.

Para que o problema seja possivel é necessario, evidentemente, que as circunferencias descritas dos pontos D e E como centros se cortem. Isto exige que o lado D E seja menor que a somma dos outros dois lados, ou menor que a sua differença.

A dupla solução graphica do problema da linha recta, tal

como foi instituida no caso fundamental nos triangulos rectilineos, fornece as bases necessarias á solução numerica do mesmo problema: Substituindo os elmentos dados de um triangulo pelos numeros que exprimem respectivamente suas medidas, a solução numerica permitte determinar os elementos desconhecidos por meio das relações que os ligam aos conhecidos. Veremos que similhantes relações se fundam essencialmente sobre as leis que foram instituidas para a solução graphica no caso da *similhança* que se baseia por sua vez naquellas estabelecidas para o caso da igualdade. Antes, porém, de estudal-as, precisamos completar a solução graphica no caso em que os elementos considerados não se acham num mesmo plano. Para isto devemos apreciar ainda a medida dos angulos diedros, e coordenar em seguida todas as questões que se referem á rectificação do circulo, bem como á avaliação das áreas e volumes das figuras já consideradas, planas ou reversas.

§ 15.º

Medidas dos angulos diedros. Substituição das construcções graphicas em relevo por outras planas.

201 — A theoria da medida dos angulos deve ser completada, reduzindo-se o caso dos angulos diedros ao dos angulos rectilineos. Já vimos que se chama *angulo diedro* ou simplesmente *diedro* a inclinação mutua de dois planos. Estes formam as *faces* do angulo diedro, e a linha resultante do encontro ou intersecção das *faces* constitue o que se chama a *aresta* do mesmo angulo.

Um angulo diedro designa-se por quatro letras, duas para indicarem a aresta, e as duas outras para assignalarem um ponto em cada uma das suas faces. As duas letras da aresta são collocadas entre as outras duas; mas quando a aresta de um diedro não é commum a outros, pode elle ser designado sómente com as duas letras respectivas. Assim, diz-se angulo diedro A B C D (Fig. 212), ou simplesmente o diedro B C.

Para se ter idéa da grandeza de um angulo diedro, já dissemos, basta imaginar-se que uma das faces P, a principio applicada sobre a face Q (Fig. 98), se move continuamente em torno da aresta A B, sempre no mesmo sentido. Nesta rotação, o plano movel P, fórma com o plano fixo Q um angulo diedro que cresce continuamente.

Si suppusermos que o plano fixo se acha prolongado além da aresta, o movimento do plano movel gerará em cada uma de suas posições successivas dois angulos diedros em vez de um. Estes angulos diedros contiguos foram chamados *adja-*

centes, de sorte que *diedros adjacentes* são os que têm a mesma aresta, uma das faces commum, e as outras duas situadas de um e de outro lado desta.

Assim, por exemplo, os angulos diedros A B C' e A B E são adjacentes (Fig. 98).

Quando estes dois angulos forem iguaes, o plano movel será evidentemente perpendicular ao plano fixo, de sorte que dois planos que se encontram perpendicularmente formam sempre dois angulos diedros, adjacentes e iguaes.

Si os dois planos perpendiculares se cortarem formarão evidentemente quatro angulos diedros iguaes entre si. Estes diedros considerados dois a dois são oppostos pela aresta; e chamam-se, em geral, diedros oppostos pela aresta aquelles em que as faces de um são os prolongamentos das faces do outro.

Denomina-se plano bissector de um diedro o plano que o divide em duas partes iguaes.

Chama-se angulo rectilineo ou angulo-plano de um diebro ao que é formado por duas rectas perpendiculares á sua aresta, num mesmo ponto desta, e situadas nas faces do diedro. Assim, si pelo ponto E, e em cada uma das faces do diedro, se tirassem as duas perpendiculares E F e E G á aresta B C (Fig. 212), o angulo F E G é o que se chama rectilineo do diedro B C. E como este angulo pode resultar evidentemente da secção das faces do mesmo diedro por um plano perpendicular á sua aresta, dá-se-lhe tambem o nome de *angulo-plano*. E' facil de mostrar que *todos os angulos planos de um mesmo diedro são iguaes*. Com efeito, supponhamos que F E G e H I J (Fig. 212) são dois angulos-planos do mesmo diedro B C: as rectas F E e H I são parallelas, porque estão num mesmo plano A, e são ambas perpendiculares a B C; pela mesma razão são parallelas as rectas E G e I J. Logo, os angulos F E G e H I J são iguaes, por terem os seus lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido.

Do mesmo modo que a grandeza de um angulo rectilineo

não depende do comprimento de seus lados, assim tambem na grandeza de um angulo diedro não influe a extensão dos dois planos que o formam, apenas limitados do lado da aresta commum.

Vejamos como se pode reduzir a medida dos angulos diedros ao caso já considerado dos angulos rectilineos.

202 — Reducção espontanea da medida dos angulos diedros á dos rectilineos. Pelo que fica exposto vê-se que o processo mais directo para medir um angulo diedro consiste em cortar as suas faces por um plano perpendicular á intersecção commum: Os traços deste plano sobre cada uma dellas formam um angulo rectilineo proporcional á sua inclinação.

Para proval-o, basta mostrar, conforme a *theoria da proporcionalidade*:

1.º *Que, si dois angulos diedros* A I O B e A' I' O' B', *são iguaes, os angulos planos correspondentes* A O B e A' O' B' *são tambem iguaes* (Fig. 213);

2.º *Que, si um angulo diedro* A I O C *é a somma de outros dois angulos diedros* A' I' O' B' e B I O C, *seu angulo plano A O C é a somma dos angulos planos* A' O' B' e B O C, *que correspondem aos outros dois diedros.*

1.º Com effeito, transportemos o diedro A' I' O' B', de maneira que o angulo recto I' O' A' se applique sobre o angulo recto I O A, face correspondente do diedro A I O B; como os diedros A I O B e A' I' O' B' são suppostos iguaes, o plano I' O' B' cahirá sobre o plano I O B, e O' B' coincidirá com a perpendicular a I O elevada no plano I O B pelo ponto O, isto é, com O B: Os angulos planos A O B e A' O' B' são portanto iguaes, por coincidirem perfeitamente.

2.º Por isso que o angulo plano A' O' B' é igual a A O B, para demonstrar que o angulo plano A O C é igual á somma de A' O' B' e de B O C, basta mostrar que as tres rectas O C, O B e O A estão num mesmo plano; ora, isto resulta immediatamente do que foi dito na theoria do plano, porquanto vimos ahi que o lugar geometrico das perpendiculares que po-

dem ser tiradas por um mesmo ponto de uma recta, é o plano conduzido por este ponto, perpendicularmente á mesma recta.

Da propriedade precedente resulta que *todo angulo diedro tem a mesma medida que o angulo plano correspondente, contanto que se tome por unidade de angulo diedro aquella que corresponde ao angulo plano escolhido para unidade.*

Com effeito, si A representa o angulo diedro a medir, e D a unidade de angulo diedro, a medida de A será a relação $\frac{A}{D}$. Como, porém, acabámos de ver que dois angulos diedros são proporcionaes a seus angulos planos correspondentes, segue-se que si B e C representam estes angulos rectilineos, a relação entre A e D será a mesma que existe entre B e C, e por conseguinte esta ultima dará a medida de A.

Ora, tomando o angulo C para unidade de angulo rectilineo, a relação $\frac{B}{C}$ será medida do angulo B; de sorte que a medida do angulo rectilineo B será tambem a do diedro A: dahi se conclue que *um angulo diedro tem a mesma medida que o angulo plano correspondente.*

Costuma-se enunciar esta propriedade de uma maneira rapida, dizendo que todo angulo diedro tem por medida seu angulo plano, embora seja mais correcto dizer-se que tem a *mesma medida*. Vê-se, assim, que tomando para unidade de angulo rectilineo, o angulo recto, e para unidade de diedro o diedro recto correspondente, a medida de um angulo diedro poderá ser expressa em graus, minutos e segundos, conforme a divisão adoptada para a circunferencia do circulo. De sorte que o angulo plano, correspondente a um diedro, se toora em relação a este o mesmo que é, relativamente a um angulo rectilineo qualquer, o arco comprehendido entre os seus lados e descrito do seu vertice como centro.

Observemos, emfim, que si as duas faces do angulo diedro fossem cortadas por um plano não perpendicular á sua intersecção, o angulo rectilineo assim obtido não poderia servir de

medida á inclinação dos planos combinados. Porque, então, os traços do plano secante sobre cada um delles formariam um angulo rectilineo, cuja obliquidade violaria a segunda condição de proporcionalidade, embora a primeira pudesse ser satisfeita, mediante a fixidez do mesmo angulo.

Com effeito, si tal medida fosse possivel, seria preciso em primeiro lugar que os dois lados do angulo rectilineo fossem igualmente inclinados sobre a aresta, porque o angulo diedro e o angulo rectilineo que lhe serve de medida devendo variar na mesma relação é mister necessariamente que o segundo se torne nullo ao mesmo tempo que o primeiro.

Isto posto, para mostrar que a segunda condição de proporcionalidade não se póde verificar, consideremos os três angulos diedros ABCQ, QBCD e ABCD (Fig. 214), e supponhamos que tendo traçado em suas faces as rectas KI, KQ e KL, se tenham entre elles as duas proporções:

$$\frac{ABCQ}{ABCD} = \frac{IKQ}{IKL}, \quad \frac{QBCD}{ABCD} = \frac{QKL}{IKL}$$

e por conseguinte

$$\frac{ABCQ + QBCD}{ABCD} = \frac{IKQ + QKL}{IKL}$$

como, porém, $ABCQ + QBCD = ABCD$, segue-se que $IKL = IKQ + QKL$, o que exige que as três rectas KI, KQ e KL estejam em um mesmo plano, sem o que poder-se-ia consideral-as como sendo as arestas de um angulo triedro e ter-se-ia por conseguinte $IKL < IKQ + QKL$. Nestas condições, tomando os três comprimentos iguaes KI, KQ e KL, e juntando BaI, BaQ e BaL, estas três ultimas linhas serão três obliquas iguaes, tiradas do ponto B sobre o plano KIQL, porque os triangulos BKI, BKQ e BKL, têm um angulo igual comprehendido entre lados iguaes. Portanto, a perpen-

dicular baixada do ponto B sobre este plano cairá em K, e coincidirá assim com B K.

Por conseguinte, para que o angulo I K L possa servir de medida ao angulo diedro A B C D, é preciso que seus lados sejam perpendiculares á aresta deste angulo diedro.

203 — INSTITUIÇÃO DE OUTRO MODO PARA MEDIR A INCLINAÇÃO DE DOIS PLANOS; COMPARAÇÃO COM O PRECEDENTE. Pode-se ainda reduzir a medida dos angulos diedros á dos angulos rectilineos, por outro processo menos directo que o precedente. *Consiste este segundo modo em medir a inclinação dos planos considerados pela de suas normaes baixadas sobre elles de um ponto qualquer, tomado entre as faces do angulo diedro assim formado.*

Para explical-o, consideremos o angulo diedro M N P Q (Fig. 215), e do ponto A no seu interior, baixemos as perpendiculares A B e A C sobre as faces respectivas. Imaginando que se prolongue a superficie plana determinada por estas duas perpendiculares, é visivel que ella encontrará as faces e a aresta do angulo diedro, sendo ao mesmo tempo perpendicular a esta aresta; A B e A C sendo respectivamente normaes ás faces M e N, o plano que passa por estas rectas será tambem perpendicular ás mesmas faces, e por conseguinte á sua intersecção N P.

Mas, N P sendo assim perpendicular ao plano A B C D, será por sua vez perpendicular ás rectas B D e C D, traçadas nestes planos, isto é, aos traços do plano secante sobre as faces do diedro. Reciprocamente, estes traços são perpendiculares á aresta N P, no ponto D; de sorte que B C D é o angulo plano que mede o diedro, conforme vimos no numero precedente. Isto posto, vê-se que o plano em questão determina o quadrilatero A B D C (Fig. 215), onde o angulo B A C é supplemento daquelle que mede o diedro, visto como sabemos que os angulos oppostos de um quadrilatero plano são supplementares. Assim, pois, para ter a medida do diedro proposto, bastará tomar o supplemento do angulo B A C das duas nor-

maes, tiradas de um ponto interior sobre as suas faces; o que se obtem graphicamente *prolongando uma dellas além do vertice, e medindo o angulo rectilineo que este prolongamento forma com a outra.*

Si em lugàr de duas normaes tirassemos do ponto A duas obliquas fixas para as faces do angulo diedro, é facil de vêr que o angulo rectilineo assim formado não seria proporcional ao angulo dos dois planos; não podendo por conseguinte lhe servir de medida.

Comquanto os dois modos que acabam de ser indicados para medir os angulos diedros sejam realmente distinctos, é facil de verificar que se tornam na realidade equivalentes. Approximando as duas construcções, vê-se com effeito que se acham de perfeito accòrdo, porque assignalam para a medida de um mesmo angulo diedro, dois angulos rectilineos que têm os lados respectivamente perpendiculares, e que em tal situação se tornam identicos um ao outro. Cada um dos dois processos offerece vantagens especiaes sobre o outro: O segundo, embora menos directo que o primeiro, é preferivel sob o ponto de vista pratico, porque não exige que se conheça a intersecção dos dois planos combinados para medir a sua mutua inclinação, e por isto é o mais empregado nas artes geometricas. O primeiro, ao contrario, tem maior importancia theorica, porque sendo deduzido de um modo directo, permitte immediatamente extender aos angulos diedros muitas propriedades estabelecidas para os angulos rectilineos. Entre estas citaremos as seguintes, por serem muitas vezes uteis:

1.ª *Dois angulos diedros oppostos pela aresta são iguaes;*

2.ª *Os angulos diedros adjacentes, formados pelo encontro de dois planos, valem em somma dois angulos rectos;*

3.ª *O plano bissector de um angulo diedro é o lugar dos pontos que, situados no interior deste angulo, são equidistantes de suas faces;*

4.ª *São iguaes entre si os angulos diedros correspondentes, alternos-internos, alternos-externos, formados por dois planos paral-*

lelos cortados por um terceiro; e são supplementares os angulos diedros internos ou externos da mesma parte;

5.ª Reciprocamente, *si os primeiros-angulos diedros, precedentemente mencionados, são iguaes; ou si os outros são supplementares, quando formados por dois planos cortados por um terceiro, estes dois planos serão parallelos;*

6.ª *Dois angulos diedros, que têm suas faces parallelas duas a duas, são iguaes ou supplementares;*

7.ª *Dois angulos diedros, que têm suas faces perpendiculares duas a duas, são supplementares ou iguaes, conforme a situação destas faces.*

Taes são as noções mais importantes sobre a medida dos angulos diedros. Como se vê, os dois processos, que foram indicados, permittem que o officio angular do circulo se extenda do caso de duas rectas ao de dois planos.

204 — Solução da questão no caso de um angulo linear. Sabendo reduzir á medida do angulo de dois planos á de um angulo rectilineo, vejamos como é possivel fazer o mesmo com a inclinação de uma recta sobre um plano. Isto se consegue facilmente substituindo o plano pela projecção da recta considerada sobre elle.

Denomina-se geralmente projecção de uma recta sobre um plano, ao conjuncto das projecções de seus differentes pontos sobre o mesmo plano; entendendo-se por projecção de um ponto sobre um plano, o *traço* ou o pé da perpendicular baixada deste ponto sobre o plano, razão pela qual tambem se lhe chama *projecção orthogonal*. Por esta definição vê-se que a projecção de uma linha recta sobre um plano é outra linha recta, e que portanto, o angulo da recta dada com o plano fica substituido pelo angulo que forma a mesma recta com a sua projecção sobre este plano.

Mas, para que nos possamos convencer da verdade de semelhante proposição, é preciso mostrar que o angulo assim obtido é o menor de todos aquelles formados pela mesma recta com as outras que podem ser tiradas pelo seu encontro com o referido plano. Isto é, *o angulo que faz uma recta com sua projecção sobre um plano é*

menor que o angulo que ella faz com qualquer outra recta tirada por seu pé neste plano.

Com effeito, seja AB uma recta qualquer (Fig. 216), AB′ sua projecção sobre o plano M, e AC uma outra recta tirada neste plano. Tomemos A C = A B′, e unamos o ponto B aos pontos C e B′. Sendo B B′ perpendicular, por construcção, ao plano M, será B C uma obliqua, e por conseguinte maior do que B B′. Mas, então os dois triangulos A B B′ e A B C têm dois lados respectivamente iguaes, e o terceiro B B′ < B C; portanto, o angulo B A B′, que se oppõe ao menor lado, será menor que B A C, que se oppõe ao maior. O mesmo raciocinio teria lugar para qualquer outro angulo. Acabamos de vêr que o angulo agudo B A B′ é o menor angulo ou o *minimum* entre todos aquelles que a obliqua A B póde formar com as rectas tiradas por seu pé no plano M ; de sorte que, o angulo obtuso supplementar B A D (situado no plano B A B′), é, ao contrario, o angulo *maximum*. Por isso, é que se diz que o angulo de uma recta com um plano corresponde ao menor dos angulos formados pela recta exterior com todas as que se acham no plano. E assim, este ultimo caso da medida angular se relaciona com o precedente ; porque, conforme o primeiro modo, as duas rectas que formam o angulo rectilineo, têm cada uma a maior inclinação possivel sobre o outro plano, de maneira a formarem entre si o angulo *maximum*. Esta co-relação póde aliás ser estabelecida directamente, como o mostra a proposição seguinte.

Entre todas as rectas que se pódem tirar por um ponto A *num plano* P (Fig. 217) *aquella que faz o maior angulo com outro plano dado* Q *é a perpendicular* A B, *baixada do ponto* A *sobre a intersecção* L T *dos dois planos* P e Q.

Seja A C uma recta qualquer tirada pelo ponto A no plano P, e A′ a projecção do ponto A sobre o plano Q; suppondo que A′B e A′C sejam as projecções de A B e de A C, tudo se reduz a mostrar que o angulo A B A′ é maior que o angulo A C A′. Com effeito, a recta A′B sendo por construcção perpendicular a L T, segue-se que, em virtude do theorema das três perpendiculares, a recta A′C é uma obliqua; e portanto, A′B < A′C. Ora, tomando sobre A′C,

a partir do ponto A', um comprimento A D < A'C e igual a A'B, o ponto D ficará situado aquem de C; e o angulo A B L, exterior ao triangulo A B D, excederá o angulo interno A D A'. Mas, os triangulos A A' B e A A' D sendo iguaes por terem um angulo recto igual, comprehendido entre dois lados iguaes, resulta que o angulo A D A' é igual ao angulo A B A': Logo, o angulo A B A' é maior que A C A'.

Observação: Quando o plano Q é horizontal, a recta A B toma o nome da linha de *maior inclinação* ou de *maior declive* do plano P, em relação ao plano Q: O angulo desta linha com o plano Q é, como sabemos, igual ao angulo plano do diedro P L T Q (Fig. 217). Vê-se, assim, que para cada ponto deste plano existe uma linha de maior declive, e sómente uma.

Emfim, das considerações precedentes resulta que a medida do angulo de dois planos se reduz á medida do angulo de uma recta com um delles, substituindo o outro pela linha nelle traçada perpendicularmente á intersecção commum. *Esta observação dá, pois, lugar a um terceiro processo para medir os angulos, diedros embora os dois outros sejam logicamente preferiveis como mais directos.*

205. Tendo apreciado a medida dos angulos nos três casos que se podem apresentar, conforme se consideram duas rectas, dois planos ou uma recta e um plano, vejamos algumas consequencias que resultam immediatamente da solução do caso intermediario.

1.ª Uma linha encontrando um plano, faz com elle de um lado e do outro, dois angulos *plano-lineares* contiguos, cuja somma equivale a dois angulos rectos;

2.ª O angulo plano-linear considerado é o menor de todos os angulos agudos; e do outro lado da recta, é o maior de todos os angulos obtusos que faz a mesma recta com todas as linhas traçadas pelo seu pé no plano proposto;

3.ª Si a recta em questão atravessa o plano, faz com elle angulos plano-lineares, que podem ser medidos por quatro angulos rectilineos iguaes dois a dois, como oppostos pelo vertice;

4.ª Si dois ou mais planos parallelos entre si são atravessados por

paus ou mais rectas parallelas, os angulos plano-lineares resultantes da intersecção devem ser ou iguaes entre si, ou supplementares, conforme os angulos rectilineos correspondentes tiverem os lados parallelos ambos dirigidos no mesmo sentido, ou em sentidos contrarios, e reciprocamente;

5.ª Emfim, o angulo plano linear que faz uma recta A B com o plano Q T (Fig. 217), equivale ao angulo diedro formado pelo plano Q T e o plano P T, conduzido segundo a recta A B e uma outra linha B L, perpendicular a A B, e situada no plano Q T.

Temos apreciado as noções essenciaes sobre a medida dos angulos, e só nos resta mencionar a sua utilidade pratica, cuja alta importancia seria excusado salientar. A sua constante e indispensavel applicação ás medidas terrestres e celestes levou os praticos á construcção de instrumentos especiaes para realisal-a rapidamente. Estes instrumentos são chamados *goniographos* ou *goniometros*, conforme os angulos medidos são dados graphicamente ou numericamente. Entre os primeiros se acham o *esquadro de agrimensor*, a *prancheta* e o *sextante graphico*; e entre os segundos o *graphometro*, o *circulo repetidor* ou *theodolito*, a *bussola*, o *sextante* e etc... Os instrumentos da primeira cathegoria, chamados geralmente *goniographos*, exigem que se substituam as construcções graphicas em relevo por simples construcções planas, unicas verdadeiramente praticaveis. Por isto devemos indicar como pode a theoria dos angulos conduzir expontaneamente ao esboço scientifico da arte especial, que permitte esta substituição, já iniciada pelos antigos, mas sómente systematisada nos tempos modernos pelo eminente Monge (1746-1818).

206 — A SUBSTITUIÇÃO GRAPHICA DAS CONSTRUCÇÕES EM RELEVO POR OUTRAS PLANAS: SUA ORIGEM NUM PROBLEMA SOBRE OS ANGULOS TRIEDROS

Como os angulos triedros são medidos por angulos rectilineos, é evidente que as inclinações dos planos que formam um angulo triedro, se tornam comparaveis ás de suas faces. Isto nos faz antever a possibilidade de combinar os seis elementos de um triedro, afim de determinar uma parte delles, quando os restantes forem conhecidos, *mediante uma construcção plana*. Para caracterisar

esta transformação, basta effectual-a no problema principal, que consiste em *dar graphicamente as três faces de um angulo triedro, afim de determinar suas inclinações planas.*

Para resolver este problema, sejam $a\,s\,b$, $a\,s\,c$ e $b\,s\,c$ as faces de um angulo triedro (Fig. 218). Si tomarmos sobre as suas arestas os comprimentos $s\,a = s\,b = s\,c$, e, juntarmos os pontos a, b e c, formaremos o triangulo $a\,b\,c$, base do tetraedro $s\,a\,b\,c$, de faces isoceles, e no qual são agudos os angulos adjacentes a $a\,b$, $a\,c$ e $b\,c$. Tomando agora sobre a aresta as o ponto m, levantando a esta aresta as perpendiculares $m\,n$ e $m\,p$, respectivamente situadas nas faces $a\,s\,b$ e $a\,s\,c$, e unindo os pontos n e p, obtemos o triangulo $m\,n\,p$ que, construido em sua verdadeira grandesa, fará conhecer o angulo m, medida do angulo diedro de aresta $a\,s$.

Operações analogas levar-nos-hão aos triangulos $m'n'p'$ e $m''n''p''$ que, construidos em suas verdadeiras grandezas, nos darão os angulos m' e m'', medidas dos angulos de arestas $b\,s$ e $c\,s$,

Mostremos, pois, como se constróe, em suas verdadeiras grandezas, os triangulos $m\,n\,p$, $m'n'p'$ e $m''n''p''$.

Traçando num plano os angulos A S B, A S C′ e B S C″ (219), respectivamente iguaes aos angulos dados $a\,s\,b$, $a\,s\,c$ e $b\,s\,c$ (Fig. 218), tomando os comprimentos $SA = SB = SC' = SC'' = sa$ e unindo os pontos A e C′, A e B, B e C″, descrevamos com os centros nos pontos A e B, e raios iguaes a A C′ e B C″, dois circulos que se cortarão no ponto C.

Si unirmos agora este ponto a A e B, teremos desenvolvido o tetraedro $s\,a\,b\,c$ sobre um plano, porquanto A S B, A S C′ e B S C″ serão as suas faces, e A B C a sua base. Isto posto, para construir em sua verdadeira grandeza o triangulo $m\,n\,p$, busquemos na figura 219 os comprimentos dos lados desse triangulo.

É obvio que os lados $m\,n$ e $m\,p$ são representados pelas partes M N e M P_1 da perpendicular N P_1 a A S, tirada pelo ponto M, cuja distancia a A é igual a $m\,a$ (Fig. 218) E, como no desenvolvimento do tetraedro o ponto p se colloca, já sobre A C′, já sobre A C, si tomarmos $AP_2 = AP_1$ e unirmos os pontos N e P_2, teremos $NP_2 = n\,p$.

Os lados do triangulo *m n p* são, portanto, respectivamente iguaes a M N, $M P_1$ e $N P_2$. Construindo, então, sobre M N como base o triangulo M N P, onde $N P = N P_2$ e $M P = M P_1$, o angulo em M medirá o angulo diedro que tem por aresta *a s* (Fig. 218).

Uma construcção analoga do triangulo *m'n'p'* dará a medida do angulo diedro que tem por aresta *bs*.

Quanto, porém, á construcção do triangulo *m''n''p''*, cumpre proceder do modo seguinte :

Tomando sobre S C' e S C'' os comprimentos C'T' e C''T'', iguaes a *cm''*, e levantando as perpendiculares T'V', T''V'' a S C' e S C'', tomemos sobre C A e C B os comprimentos

$$C P'' = C'V', \text{ e } C N'' = C''V'',$$

e unamos os pontos N'' e P'' : As rectas N''P'', T'V' e T''V'', representarão os lados *n''p''*, *m''n''* e *m''p''* (Fig. 218) do triangulo a construir em sua verdadeira grandeza. Si sobre N''P'' como baze, construirmos, emfim, o triangulo M''N''P'', onde

$$M''N'' = T'V' \text{ e } M''P'' = T''V'',$$

o angulo em M'' medirá o angulo diedro que tem por aresta *c s*.

Observação. A reducção de um angulo ao horizonte, que se faz mistér nas operações topographicas, não é mais do que um caso particular do problema precedente. Esta questão reduz-se, com effeito, á seguinte : Conhecidos os angulos A S B, A S V e B S V (Fig. 220), sendo S V a *vertical* do ponto S, determinar a projecção horizontal M P N do primeiro angulo.

Como se vê, são dadas as faces M S N, M S P e N S P de um angulo triedro, e procura-se o angulo rectilineo M P N que mede o angulo diedro de aresta S P. Todavia, prefere-se ordinariamente a solução numerica desta questão, a qual é dada pela *trigonometria*.

É evidente, em vista do que foi demonstrado, que o problema só será possivel quando a somma das três faces dadas fôr menor que quatro angulos rectos. Além disto, será preciso que a terceira face B S V seja menor que a somma das duas outras A S B e A S V, e maior que a sua differença.

A solução deste problema nos deixa vêr que seria possivel resolver semelhantemente os dois outros, isto é, suppor dados duas faces e o angulo diedro comprehendido, ou uma face e os dois diedros adjacentes, com o fim de determinar-se, num e no outro, os elementos restantes do triedro. É escusado, porém, considerar aqui a solução graphica de semelhantes questões, que apenas temos em vista caracterizar.

A sua solução algebrica, sufficientemente preparada pelas noções que foram expostas até aqui, será apreciada na ultima parte deste trabalho, como convem a uma marcha dogmatica, essencialmente conforme ao ponto de vista historico. Porque a solução algebrica surgio com Hipparcho muito depois da solução graphica, quando o permittiu o sufficiente desenvolvimento do primitivo *calculo das relações* (theoria das proporções).

Sabe-se que, antes de Hipparcho, as necessidades astronomicas haviam solicitado a solução numerica de semelhantes questões, que foram resolvidas nos casos mais simples por uma combinação do calculo arithmetico com os principios geometricos. Foi provavelmente Aristarco, celebre astronomo grego (15 a), quem primeiro se occupou de taes pesquisas, e por isto se lhe attribuem os estudos iniciaes sobre a solução dos problemas relativos á medida dos angulos triedros.

210 — Resolução do problema inverso ao precedente; 5.º caso de igualdade dos angulos triedros, e reducção das questões sobre estes. Pode-se tambem propor o problema inverso ao precedente, em que *são dados os angulos diedros de um triedro e se pedem as faces respectivas*. A co-relação entre todo angulo triedro e aquelle cujas arestas são normaes ás suas faces permitte facilmente resolver

(15 a) *Aristarco de Samos* floresceu cerca do meiado do seculo III A. C. Foi um dos primeiros que sustentaram que a Terra gira em torno do seu eixo, e, segundo Plutarco, esta doutrina lhe ia sendo funesta, porque o estoico Cleanto accusou-o de impiedade por ter ousado perturbar o repouso de Vesta. Este celebre astronomo descobriu tambem um methodo engenhoso para calcular as distancias relativas da Terra ao Sol e á Lua. A este respeito deixou um tratado, que foi traduzido por M. Fortia d'Urban, 1823.

este problema; e uma tal co-relação é expressa pelo theorema seguinte:

Si de um ponto tomado no interior de um angulo triedro se baixam perpendiculares a cada uma das faces, os planos determinados por estas perpendiculares formam um segundo triedro supplementar do primeiro; isto é, cujas faces são supplementos dos angulos que medem os diedros do primeiro, e reciprocamente.

Com effeito, seja S A B C o triedro dado, e O um ponto tomado no seu interior (fig. 221). Tirem-se O P perpendicular á face A S B, O M perpendicular á face B S C e O N perpendicular a A S C.

1.º O triedro O M N P tem as suas faces *m*, *n* e *p* respectivamente supplementares dos diedros S A, S B e S C. Porque, a face ou o angulo M O P, cujo vertice é interior ao diedro S B, tem os lados perpendiculares ás faces deste diedro; logo, em vista do que dissemos a respeito do 2º modo de medir os angulos diedros, a face M O P é supplemento do diedro S B. Demonstrar-se-ia do mesmo modo que as outras faces do triedro O são supplementos dos angulos diedros do triedro S.

2.º Para provar que reciprocamente os diedros do triedro O são supplementos das faces do triedro S (fig. 221), basta mostrar que o triedro S tem as suas arestas perpendiculares ás faces do triedro O, porque a questão fica reduzida ao caso precedente. Com effeito, sendo O P e O N respectivamente perpendiculares ás faces A S B e A S C, o plano ou face P O N é perpendicular ao mesmo tempo ás duas faces A S B e A S C, e portanto, á sua intersecção S A; e reciprocamente, S A é perpendicular á face N O P. Provar-se-ia do mesmo modo que as outras arestas S B e S C, do triedro S, são perpendiculares ás faces M O P e M O N do triedro O; e como o ponto S é interior a este triedro, conclue-se, pela primeira parte deste theorema, que os diedros do triedro O são supplementos das faces do triedro S.

Estes triedros são chamados *reciprocos*, porque se derivam um do outro por uma construcção inversa; e tambem *supplementares*, porque os diedros de um são supplementos das faces do outro, como acabamos de vêr.

Representando por a, b e c, as faces do triedro S, e por A, B e C, os diedros respectivamente oppostos ás mesmas faces, por m, n e p, M, N e P, as faces e os diedros oppostos do triedro suplementar O, teremos

$$m = 2r - A \qquad M = 2r - a$$
$$n = 2r - B \qquad N = 2r - b$$
$$p = 2r - C \qquad P = 2r - c.$$

Portanto, sendo conhecida uma relação qualquer entre os diedros e as faces do primeiro triedro, poderemos deduzir uma relação *corelativa* entre os faces e os diedros do triedro supplementar.

Corollarios. É assim que a consideração dos triedros supplementares permitte completar o estudo dos angulos triedros, demonstrando algumas de suas propriedades mais importantes, como mostramos em seguida.

I. *Dois triedros são iguaes quando têm os diedros respectivamente iguaes, e semelhantemente dispostos.*

Com effeito, sejam S e S' os dois triedros que têm os diedros respectivamente iguaes e semelhantemente dispostos, S A = S'A', S B = S'B' e S C = S'C'. Construindo os triedros supplementares O e O', vê-se que as faces destes triedros são respectivamente iguaes, por serem supplementos dos diedros iguaes de S e S'. Mas, os triedros O e O' tendo as três faces respectivamente iguaes, são iguaes; e portanto, os seus diedros tambem o são um a um: Logo, as faces dos triedros S e S' serão iguaes, por serem supplementos de diedros iguaes dos triedros O e O'. Assim, pois, os triedros S e S' tendo as três faces respectivamente iguaes, são iguaes conforme vimos.

II. Conforme a connexidade estabelecida pelo theorema precedente, a metade dos seis casos de igualdade, relativos aos angulos triedros, se reduz á outra metade, contanto que se tenha sempre o cuidado de tomar os supplementos dos dados e das incognitas de cada problema.

Com effeito, os problemas que podem ser propostos sobre um angulo triedro são em número de seis, porém, se podem dar successivamente: 1º as tres faces; 2º duas faces e o angulo diedro por

ellas formado; 3º duas faces e o angulo diedro opposto a uma dellas; 4º uma face e os dois angulos diedros adjacentes; 5º uma face e dois angulos diedros, dos quaes um é opposto a esta face; 6º os três angulos diedros.

Mas, estas seis questões podem ser reduzidas a tres; porque, si se desse, por exemplo, os tres angulos diedros A, B e C de um triedro, as faces do triedro supplementar valeriam respectivamente $180° - A$, $180° - B$ e $180° - C$.

Portanto, sabendo resolver a 1ª questão, poder-se-ha determinar os angulos diedros deste triedro supplementar, e desde então tomando os seus supplementos se terão as faces do triedro proposto. Assim, pois, a 6ª e a 1ª questões se reduzem a uma só. O mesmo aconteceria com a 5ª e a 3ª, bem como com a 4ª e a 2ª.

Concluimos, emfim, que para determinar um triedro, basta que sejam dados os elementos seguintes: 1º tres faces; 2º duas faces e o diedro comprehendido ou opposto a uma dellas; 3º uma face e os dois diedros adjacentes, sendo que estes tres casos comprehendem os tres outros.

III. Do mesmo theorema resulta que *em todo triedro*: a) *a somma dos angulos diedros está comprehendida entre 2 e 6 rectos*; b) *cada diedro augmentado de dois rectos é maior que a somma dos outros dois.*

a) Com effeito, seja S A B C um triedro qualquer, e S'A'B'C' o seu supplemento. Chamando A, B e C os diedros do primeiro, e a', b' e c' as faces do segundo, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} A + a' = 2\,r \\ B + b' = 2\,r \\ C + c' = 2\,r \end{array}\right\} \text{donde } A + B + C + a' + b' + c' = 6\,r.$$

Ora, a somma das faces a', b' e c', estando comprehendida entre *zero* e 4 r, segue-se que subtrahindo esta somma de 6 r, o resto, que será o valor de A B C, estará comprehendido entre dois rectos e seis rectos; são, pois, 180º e 540º os limites da somma dos angulos diedros que compõem qualquer angulo triedro. Só attingirá este limite, quando o angulo triedro se transformar num plano.

Deste corollario resulta immediatamente que os três angulos diedros de um triedro podem ser indistinctamente agudos, rectos ou obtusos. Póde, pois, possuir um dois ou três diedros rectos : no primeiro caso o triedro diz-se *rectangulo* ; no segundo *bi-rectangulo* ; e no terceiro, *tri-rectangulo* ; tambem chamado *orthoedro*. Quando tem um ou mais angulos obtusos chama-se *obtusangulo*.

b) Seja C o menor diedro do triedro considerado ; *e* será evidentemente a maior face do triedro supplementar. Ora, sabemos que $c' < a' + b'$, portanto, substituindo as quantidades equivalentes, virá :

$$2r - c < (2r - A) + (2r - B) \text{ ou}$$

$$2r - c < 4r - (A + B).$$

Ajuntando $A + B + C$ aos dois membros da igualdade, e subtrahindo 2 r, virá :

$$A + B < C + 2r \text{ ou}$$

$$C + 2r > A + B,$$

como queriamos demonstrar.

Deste corollario deduz-se immediatamente as condições necessarias e bastantes para que um triedro contenha três diedros dados.

O caso dos angulos polyedros. Um angulo polyedro podendo sempre ser decomposto em triedros, é evidente que a inclinação relativa dos planos que formam um angulo polyedro se torna apreciavel pela dos angulos triedros em que se decompõe. Aliás, o principio que limita a medida dos triedros é susceptivel de ser generalisado aos angulos polyedros, mediante a propriedade seguinte :

Todo triedro tem por medida o excesso da semi-somma de seus tres diedros sobre um diedro recto.

Com effeito, consideremos o triedro *s a b c* ; si prolongarmos além do vertice as arestas *sa*, *sb* e *sc*, de comprimentos iguaes *sa'*, *sb'* e *sc'*, e imaginarmos os planos que limitam os dois triedros symetricos, teremos evidentemente :

1.° triedro *s a b c* + triedro *s a' b c* = diedro *b s a c*.

2.º triedro $s\,a\,b\,c$ + triedro $s\,a\,b'\,c$ = diedro $c\,s\,b\,a$.

3.º triedro $s\,a\,b\,c$ + triedro $s\,a\,b\,c'$ = diedro $a\,s\,c\,b$.

Sommando estas igualdades membro a membro, observando que $s\,a\,b\,c' = s\,a'\,b'\,c$ (por isso que dois triedros symetricos são equivalentes) e que a somma do triedro $s\,a\,b\,c$ + triedro $s\,a'b\,c$ + triedro $s\,a\,b'c$ + triedro $s\,a'b'c$ é igual a dois diedros rectos, acha-se :

2 triedros $s\,a\,b\,c$ + 2 diedros rectos = diedros $b\,s\,a\,c$ + diedro $c\,s\,b\,a$ + diedro $a\,s\,c\,b$, donde se deduz finalmente : triedro $s\,a\,b\,c$ $= \frac{1}{2}$ (diedro $b\,s\,a\,c$ + diedro $c\,s\,b\,a$ + diedro $a\,s\,c\,b$) — 1 diedro recto.

Nessas condições, designando-se por A o diedro agudo ou obtuso dum triedro bi-rectangulo s, tem-se

triedro $s = \frac{1}{2}(A + 2) - 1 = \frac{A}{2}$; o que é evidente, tomando o angulo recto para unidade.

Da propriedade precedente resulta que *um angulo polyedro qualquer tem por medida o excesso da semi-somma de todos seus diedros sobre tantos diedros rectos quantos são as faces menos duas.* Com effeito, vimos que todo angulo polyedro póde ser decomposto em tantos triedros quantos são as faces menos duas, e basta applicar a cada um delles a propriedade precedente, para se chegar á conclusão acima. Nestas condições, chamando Σ á somma dos diedros de um angulo polyedro de n faces, vemos que

$$\Sigma > 2(n - 2) \text{ e } < 2n, \text{ donde se deduz que}$$

$$\Sigma - (n - 2) > 0 \text{ e } \frac{\Sigma}{2} - (n - 2) < 2.$$

Assim, pois, *todo angulo polyedro está comprehendido entre* o e 2 *diedros rectos.*

Com o presente capitulo temos completado o preambulo geral, indispensavel ao estudo da Geometria, quer para preparar a solução effectiva, quer para dirigir a applicação ulterior das theorias directamente relativas ás questões sobre a medida da extensão. Nestas theorias reside, sobretudo, a destinação final do conjunto

dos estudos geometricos, e nós as iniciaremos no § seguinte. Antes porém, será conveniente que nos exercitemos resolvendo algumas questões sobre a segunda e terceira partes do preambulo fundamental da *geometria*.

QUESTÕES SOBRE A SEGUNDA E TERCEIRA PARTES DO PREAMBULO

Construcção dos polyedros regulares, quando se dá uma das faces, ou sómente o lado della ; inclinação de duas dessas faces adjacentes. Outros problemas.

1.º Problema. *Construir um tetraedro regular sendo dada uma face.* Seja A B C (Fig. 222) o triangulo equilatero que deve ser uma das faces do tetraedro; pelo ponto O, centro desse triangulo, levante-se O S perpendicular ao plano A B C ; termine-se esta perpendicular no ponto S, de modo que se tenha A S = A B ; tracem-se S B, S C, e a pyramide S A B C será o tetraedro pedido. Porque, sendo iguaes as distancias O A, O B e O C, as obliquas S A, S B e S C, desviam-se igualmente do pé da perpendicular S O, e são iguaes. Uma destas obliquas, S A, é igual á A B; logo, as quatro faces da pyramide S A B C são triangulos iguaes ao triangulo dado A B C. De outra parte, os angulos triedros da mesma pyramide são iguaes entre si, por serem formados, cada um, com tres angulos planos iguaes; por conseguinte, essa pyramide é um tetraedro regular.

2.º Problema. *Construcção do hexaedro regular.* Seja A B C D (Fig. 223) um quadrado dado que deve ser uma das faces do cubo; sobre a base A B C D construa-se um prisma recto, cuja altura A E seja igual ao lado A B. É claro que as faces deste prisma são quadrados iguaes entre si, por serem formados, cada um, com tres angulos rectos; logo, o mesmo prisma é um hexaedro regular ou cubo.

3.º Problema. *Construcção do octaedro regular.* Seja A M B (Fig. 224) o triangulo equilatero que deve servir de face ao corpo pedido; sobre o lado A B descreva-se o quadrado A B C D; pelo

ponto O, centro deste quadrado, levante-se ao plano do mesmo a perpendicular T S, terminada de uma e de outra parte em T e S, de modo que se tenha O T = O S = A O ; tracem-se depois S A, S B, T A, etc.. ; ter-se-ha um poliedro S A B C D T, composto de duas pyramides quadrangulares S A B C D e T A B C D, reunidas pela sua baze commum A B C D ; este polyedro será o octaedro regular pedido.

Com effeito, o triangulo A O S é rectangulo em O, assim como o triangulo A O D ; os lados A O, O S e O D são iguaes : logo, os mesmos triangulos são iguaes, e teremos A S = A D. Demonstrar-se-ha do mesmo modo que todos os outros triangulos rectangulos A O T, B O S, C O T, etc... são iguaes ao triangulo A O D : logo, todos os lados A B, A S, AT, etc... são iguaes entre si ; por onde se conclue que o polyedro S A B C D T está limitado por oito triangulos iguaes ao triangulo equilatero dado A B M.

É facil de mostrar, alem disto, que os angulos tetraedros desse polyedro são iguaes entre si. Por ex., o angulo S é igual ao angulo B, pois é visivel que o triangulo S A C é igual ao triangulo D A C, e desta sorte, o angulo A S C é recto : logo, a figura S A T C é um quadrado igual ao quadrado A B C D. Porém, comparando a pyramide B A S C T com a pyramide S A B C D, pode a baze da primeira A S C T ser collocada sobre a baze A B C D da segunda ; e sendo então o ponto C commum, a altura O B da primeira pyramide coincidirá com a altura O S da segunda, e as duas pyramides confundir-se-ão numa unica : Logo, o angulo polyedro S é igual ao angulo polyedro B ; e portanto, o corpo S A B C D T é um octaedro regular.

Esta construcção nos deixa vêr que *si tres rectas iguaes* A C, B D e S T *são perpendiculares entre si, e cortam-se mutuamente ao meio, os extremos dessas rectas serão os vertices de um octaedro regular.*

4.º Problema. *Construcção do dodecaedro regular.* Seja A B C D E (Fig. 225) o pentagono regular que deve servir de face ao corpo pedido ; sejam A B P e C B P dois angulos planos iguaes ao angulo A B C : com esses angulos planos forme-se o angulo diedro B, e seja α a inclinação mutua de dois desses planos. Formem-se do mesmo

modo, nos pontos C, D, E e A, angulos diedros iguaes ao diedro B, e situados semelhantemente : o plano C B P confunde-se com o plano B C G, porque ambos estão inclinados da mesma quantidade sobre o plano A B C D. Podemos, pois, no plano P B C G descrever o pentagono B C G F P, igual ao pentagono A B C D E.

Si fizermos o mesmo em cada um dos planos C D I, D E L, etc..., teremos uma superficie convexa P F G H.... composta de seis pentagonos regulares iguaes, e inclinados cada um sobre o seu adjacente da mesma quantidade α. Seja $pfgh$ etc... (Fig. 225 bis) uma segunda superficie igual a P F G H etc..; é facil de mostrar que essas duas superficies podem ser reunidas de modo que formem uma unica superficie convexa e continua. Com effeito, o angulo opf, por ex., póde reunir-se aos dous angulos O P B e B P F, formando os tres um angulo triedro P, igual ao angulo B ; e nesta juncção, nada se terá modificado na inclinação dos planos B P F e B P O, porque esta inclinação é a necessaria para a formação do angulo triedro.

Mas, ao mesmo tempo que se forma o angulo triedro P, o lado pf se applica sobre o seu igual P F, e no ponto F′ se acharão reunidos tres angulos planos P F G, pfc e cfg, que formarão por sua vez um angulo triedro igual a cada um dos angulos já formados ; esta juncção se fará sem alterar em nada o estado do angulo P, nem o da superficie $cfgh$ etc.. ; porque P F G e fp, já reunidos em P, conservam entre si a inclinação commum α, do mesmo modo que os planos cfg e cfp.

Continuando assim successivamente, vê-se que as duas superficies se ajustarão uma com a outra, para formarem uma unica superficie continua, e reentrante sobre si mesma. Esta superficie será a de um dodecaedro regular, porque é composta de doze pentagonos regulares iguaes; e todos os seus angulos polyedros são iguaes entre si.

5.º Problema. *Construcção do icosaedro regular*. Seja o triangulo A B C (Fig. 226 bis) uma das suas faces ; deve-se formar um angulo polyedro com cinco planos iguaes ao triangulo A B C, e igualmente inclinados cada um sobre o seu adjacente.

Para isto, sobre o lado B'C', igual a B C, faça-se o pentagono regular B'C'F'E'D'; pelo centro deste pentagono levante-se ao seu plano uma perpendicular, terminada em A', de modo que B'A' = B'C'; tracem-se A'C', A'F', A'E' e A'D', e o angulo poliedro A' formado pelos cinco planos B'A'C', C'A'F', etc.., será um dos angulos polyedros do corpo procurado. Porque as obliquas A'B', A'C', etc..., são iguaes, e qualquer dellas, A'B', é igual ao lado B'C'; logo, todos os triangulos B'A'C', C'A'F', etc..., são iguaes entre si, e ao triangulo dado ABC.

É visivel, por outro lado, que os plános B'A'C', C'A'F', etc.., estão igualmente inclinados cada um sobre o seu adjacente; porque os angulos diedros B'C', C'F', etc..., são iguaes entre si, por serem formados, cada um, por dous angulos de triangulos equilateros e um de pentagono regular. Chamemos G' a inclinação dos dous planos onde se acham os angulos iguaes : o angulo G' será ao mesmo tempo a inclinação de cada um dos planos que compõem o angulo polyedro A', sobre o seu adjacente.

Isto posto, si fizermos nos pontos A, B, C (Fig. 226 bis), angulos polyedros iguaes cada um ao angulo A', teremos uma superficie convexa, composta de dez triangulos equilateros, dos quaes cada um estará inclinado sobre o seu adjacente, da quantidade G'; e os angulos D, E, F, etc..., do seu contorno, reunirão alternadamente tres e dous angulos de triangulos equilateros. Imagine-se uma segunda superficie igual a D E F G etc... (Fig. 226 bis) : estas duas superficies poderão adaptar-se mutuamente, reunindo cada angulo triplo de uma a um angulo duplo da outra; e como os planos desses angulos têm já entre si a inclinação G' necessaria para formar um angulo polyedro quintuplo, igual ao angulo A', em nada se terá mudado, nesta juncção, o estado de cada superficie em particular, e as duas formarão uma unica superficie continua, composta de vinte triangulos equilateros. Esta superficie será a do *icosaédro regular*, porquanto os angulos polyedros são todos iguaes entre si.

6.° Problema. *Achar a inclinação de duas faces adjacentes de qualquer dos polyedros regulares.* Esta inclinação deduz-se graphi-

camente da construção dos cinco polyedros regulares, que acaba de ser effectuada. Mas, para isto é necessario que se tenha presente a solução do problema indicado, que serve de baze á *geometria descriptiva*, isto é : *sendo dados os três angulos planos que formam um angulo triedro, determinar o angulo que fazem entre si dous desses planos*. Appliquemol-o successivamente a cada um dos polyedros regulares.

a) *No tetraedro* : Cada angulo triedro é formado com tres angulos de triangulos equilateros, deve-se, pois, procurar por meio do problema citado, o angulo que entre si fazem dous desses planos : esse angulo será a inclinação de duas faces adjacentes do tetraedro.

b) *No hexaedro* : O angulo de duas faces adjacentes é, como sabemos, um angulo recto.

c) *No octaedro* : Forme-se um angulo triedro com dous angulos rectilineos de triangulos equilateros e um angulo recto : a inclinação dos dous planos em que se acham os angulos dos triangulos, será a de duas faces adjacentes do octaedro.

d) *No dodecaedro* : Cada angulo triedro é formado com três angulos de pentagonos regulares ; a inclinação dos planos de dous desses angulos será a de duas faces adjacentes do dodecaedro.

e) *No icosaedro* : Forme-se um angulo triedro com dous angulos de triangulos equilateros e um angulo de pentagono regular : a inclinação dos dous planos em que se acham os angulos dos triangulos, será a de duas faces adjacentes do icosaedro.

7.º Problema. *Resolver numericamente as questões precedentes* (15 c).

a) *Tetraedro regular* : Seja A B C a baze de um tetraedro (Fig. 227) e A D S o rebatimento de uma secção feita por um plano passando pelo meio da aresta B C, perpendicularmente a esta aresta. Esta secção passa necessariamente pelos vertices A e S, visto como estes pontos são equidistantes dos pontos B e C. A perpen-

(15 c) Só devem ser tratadas assim, depois do estudo da *trigonometria*, e só as antecipamos para reunir aqui as questões desse genero.

dicular S I é a altura do tetraedro; e o ponto I acha-se sobre a recta A D, mediana da baze.

Este mesmo ponto deve se achar sobre cada mediana da baze; e assim fica no ponto de concurso das medianas, e por conseguinte aos 2/3 do comprimento de A D. Portanto D I = 1/3 m.

A recta S D é uma mediana da face B S C; tem-se, pois, S D = A D = m. O angulo diedro procurado não é senão o angulo D, do triangulo rectangulo D I S, e veremos que este angulo póde ser obtido pela relação D I ÷ D S, ou 1/3 m ÷ m, ou simplesmente 1/3, isto é : 0,333...

Esta relação é o que se chama em trigonometria o *coseno* do angulo D, e o angulo que tem para coseno 1/3 é o de 70°31'72", comforme verificaremos.

b) *Hexaedro regular :* No exaedro regular ou *cubo*, as faces são perpendiculares entre si, e o diedro é de 90°.

c) *Octaedro regular*. O octaedro regular póde ser decomposto em duas pyramides quadrangulares regulares, tendo por baze commum um quadrado A B C D (Fig. 228), do qual um dos lados é a aresta *a* do polyedro.

A recta E F que junta os vertices destas pyramides é perpendicular ao quadrado A B C D, em seu meio O. Pelo ponto I, meio da aresta B C, tiremos um plano perpendicular a esta aresta. Este plano passa necessariamente pelos pontos E e F, que são equidistantes de B e de C. O angulo O I E é a metade do diedro procurado; e este angulo é dado pela relação I O ÷ I E, ou 1/2 a ÷ 1/2 a $\sqrt{3}$, ou 1 ÷ $\sqrt{3}$.

Fazendo o calculo por meio das taboas *trigonometricas*, acharemos que o angulo O I E = 54°44'12". Portanto, o angulo diedro do octaedro é igual a 109°28'24".

d) *Dodecaedro regular*. Seja H o meio da aresta B M (Fig. 229). Em virtude dos pentagonos regulares que servem de faces ao polyedro, a recta H K é perpendicular a B M; e o mesmo se dá com X H : assim, o angulo plano X H K mede o diedro pedido, que póde ser obtido pela relação K Z ÷ H K; esta relação é o que se chama em *trigonometria*, seno do angulo Z H K.

No pentagono regular A B M L K, o angulo L é de 108°; portanto, no triangulo isosceles K L M, cada um dos angulos K e M é de 36°.

Seja G o meio de K M; a recta $GH = 1/2\ KB = 1/2\ KM = GM$. Assim, o triangulo M G H é isosceles, e seu angulo $H = M = 108° - 36° = 72°$. Dahi resulta que o triangulo M G H é semelhante ao triangulo central de um decagono regular; portanto:

$$MH \text{ ou } 1/2\ a = 1/2\ GM(\sqrt{5} - 1) = 1/4\ KM(\sqrt{5} - 1).$$

Dahi se tira $$KM = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{5} + 1$, obtem-se

$$KM = 1/2\ a(\sqrt{5} + 1) \quad \text{e} \quad KM^2 = 1/2\ a^2(3 + \sqrt{5}).$$

Vê-se, assim, que *a diagonal de um pentagono regular é igual á metade do lado, multiplicada* por $1 + \sqrt{5}$.

Applicando esta formula ao pentagono regular que tivesse por vertices os pontos K, M, X, Q e S, fariamos

$$KX = 1/2\ KM(\sqrt{5} + 1) = 1/4\ a(\sqrt{5} + 1)^2 = 1/2\ a(3 + \sqrt{5})$$

$$KX^2 = 1/2\ a^2(7 + 3\sqrt{5})$$

$$KZ = 1/2\ KX = 1/4\ a(3 + \sqrt{5})$$

$$KZ^2 = 1/8\ a^2(7 + 3\sqrt{5}).$$

O triangulo rectangulo M H K, dá:

$$HK^2 = KM^2 - MH^2 = a^2\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}a^2(5 + 2\sqrt{5}).$$

Emfim, obter-se-ha

$$\text{seno } ZHK = \frac{KZ}{HK} \quad \text{e} \quad \text{seno}^2\ ZHK = \frac{KZ^2}{HK^2},$$

ou

$$\text{seno}^2\, Z H K = \frac{1/8\, a^2 (7 + 3\sqrt{5})}{1/4\, a^2 (5 + 2\sqrt{5})} = \frac{1/2 (7 + 3\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}{(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.$$

Assim,

$$\text{seno}\, Z H K = \sqrt{1/10\,(5 + \sqrt{5})}\ (^{**}).$$

Por isso veremos que o angulo Z H K $=$ 58°16'90" ; portanto, o angulo diedro do dodecaedro regular deve ser igual a 116°33'80".

e) *Icosaedro regular*. As faces sendo triangulos equilateros, as medianas B L e E L (Fig. 230), são perpendiculares á aresta I A, e o angulo E L B é o angulo-plano correspondente ao diedro procurado.

No pentagono regular A B C D E, a diagonal B E $= 1/2\, a\,(\sqrt{5} + 1)$ e B P $= 1/2$ B E $= 1/4\, a\, (\sqrt{5} + 1)$. No triangulo equilatero A B I, a altura B L $= 1/2\, a\, \sqrt{3}$.

Tem-se, pois,

$$\text{seno}\ B L P = \frac{B P}{B L} = \frac{1/4\, a\,(\sqrt{5} + 1)}{1/2\, a\, \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}}.$$

O angulo B L P $=$ 69°05',80.

Logo, o angulo diedro do icosaedro regular é igual a 138°11',60

Estas cinco questões fazem sentir a necessidade de substituir a solução graphica do problema fundamental sobre a medida dos comprimentos rectilineos, por uma solução numerica que permitta resolvel-as mais facilmente, bem como a todas do mesmo genero. É o que faremos no primeiro terço do 2° volume.

8.° Problema. Podemos agora apresentar outra solução, muito usual e elegante, do problema resolvido no n° (132) § 11 ; isto é : *achar a mais curta distancia entre duas rectas não situadas no mesmo plano.*

(**) Em cada polyedro regular, nota-se que o angulo tem um valor independente da aresta : assim deve ser, visto como ha semelhança entre todos os tetraedros regulares, entre todos os cubos, entre todos os octaedros regulares, e etc.

Sejam A B e C D (Fig. 231) as rectas dadas. Por qualquer ponto B, da recta A B, tira-se o plano M perpendicular a esta recta; e seja C E a projecção da recta C D sobre o plano M.

Do ponto B baixe-se a perpendicular B F sobre a recta C E; pelo ponto F levante-se F G perpendicular a C E, no plano C D E; e pelo ponto G tire-se G H perpendicularmente á A B: Será G H a perpendicular commum a A B e C D.

É facil dar a demonstração deste traçado, sobretudo tendo em vista que *a perpendicular commum a duas rectas não situadas no mesmo plano, é a intersecção dos planos que as projectam sobre um plano qualquer, parallelo ás duas rectas*, conforme se infere da solução que já foi dada ao mesmo problema.

9.º Problema: *Achar a inclinação de duas rectas* A B e C D, *que não se encontram, e não se acham no mesmo plano.* Basta para isto determinar o angulo que fazem entre si duas parallelas tiradas a cada uma das rectas por um mesmo ponto do espaço; ou mais simplesmente, determinar a inclinação de uma dellas sobre uma parallela tirada á outra por um de seus pontos E. Assim, o angulo F E D (Fig. 101), é a medida da inclinação das duas rectas A B e C D.

10.º Problema: *Sendo dados dois pontos* A e B, *e uma recta* x y, *achar sobre esta um ponto* M *tal, que a somma* A M + B M *seja um minimum.* Si os dois pontos dados estão, como A e B' (Fig. 232), situados de um e de outro lado de x y, a recta A B' resolve a questão; ella corta x y no ponto procurado M.

Si os dois pontos dados A e B, ficarem do mesmo lado da recta x y (Fig. 232), observe-se que todo ponto M' de x y, está igualmente distante do ponto B e de seu symetrico B', em relação a x y; o caminho A M' B' é, portanto, igual a A M' B; e basta, então, procurar o minimum de A M' B'.

Ora, A e B' estando de um lado e d'outro de x y, só resta tirar a recta A B', que encontra x y no ponto procurado M.

Convem notar que *as duas partes* A M e M B *do caminho minimum estão igualmente inclinadas sobre* xy. Com effeito, no rebatimento da figura, em torno de x y, o ponto M ficando fixo e B cahindo sobre o seu symetrico B', o angulo B M y cobre o angulo B' M y; e como

este ultimo é opposto pelo vertice a A M X, vê-se que os angulos A M X e B M y são iguaes.

11.º Problema. *Sendo dados dois pontos* A e B, *e uma recta* x y, *achar sobre esta recta um ponto* M *tal, que* B M — A M *seja um maximum*. Si os dois pontos dados estão, como A e B′ (Fig. 233), situados dum mesmo lado de x y, a recta A B′ resolve a questão; ella corta x y no ponto procurado M. Com effeito, M′ sendo um ponto qualquer de x y, no triangulo B′M′A tem-se A B′ ou B′M — A M > B′M′ — A M′.

Si os dois pontos A e B estão de um e de outro lado de x y (Fig. 233), vê-se que substituindo, como precedentemente, ao ponto B o seu symetrico B′, em relação a x y, basta tirar A B′, que cortará x y no ponto procurado M.

O processo que empregamos na solução deste problema e do precedente, é chamado *methodo por symetria*.

12.º Problema. *Sendo dadas duas parallelas* x y *e* x′y′, *e dois pontos* A *e* B *situados fóra dellas, de um lado e do outro, achar o mais custo caminho de* A *para* B, *por uma linha quebrada* A M N B, *tal que à porção* M N, *comprehendida entre as parallelas, tenha uma direcção dada*. Basta ter a idéa de tirar pelo ponto B (Fig. 234), a recta B I parallela á direcção dada, e igual ao comprimento constante que as duas parallelas x y e x′y′ interceptam sobre as rectas que têm essa direcção. Porque se A M′N′B fôr um qualquer dos caminhos considerados no enunciado, o seu comprimento será igual ao da linha quebrada A M′I B, elle se comporá, portanto, de uma parte constante B I, e de uma outra variavel A M′I, e tudo se reduzirá a procurar sobre a linha x y a posição do ponto M′, para a qual o caminho A M′I é minimum.

Ora, tal posição não é evidentemente senão o ponto M, onde a recta A I corta x y: Conhecendo M, só resta tirar MN parallela á direcção dada, e traçar N B, para obter o *caminho minimum pedido*.

13.º Problema. *Construir um trapezio, conhecendo os comprimentos dos quatro lados*. Uma construcção auxiliar, como no problema precedente, permitte resolver facilmente este outro. Basta, para isto, ter a inspiração de tirar por um dos vertices, uma parallela a

um dos lados não parallelos; obtem-se assim um parallelogrammo e um triangulo. Sabemos construir o triangulo, visto como são conhecidos os seus tres lados; e desde então, a figura se concluirá facilmente.

14.º Problema. *Construir, entre todos os triangulos equilateros cujos lados passam por tres ponto dados* A, B e C, *aquelle que tem o maior perimetro*. O vertice M do triangulo procurado M N P (Fig. 235), deve-se achar sobre o segmento capaz de 60°, descripto sobre A B. Da mesma fórma, o segmento capaz de 60°, descripto sobre A C, deve conter o vertice N. Obter-se-ha, portanto, um triangulo equilatero, circunscripto ao triangulo A B C, descrevendo sobre A B e sobre A C dois segmentos de 60°; tirando á vontade, pelo ponto A, uma secante M A N, e traçando as rectas M B e N C; que por seu encontro darão o terceiro vertice P. Só restará, pois, escolher entre todos os triangulos que podem assim ser obtidos, aquelle cujo lado M A N é maximum. O problema reduz-se, portanto, ao seguinte: *Tirar por um ponto A, commum a duas circunferencias C e D, a secante maximum* (Fig. 236).

Para resolvel-o, suppondo M A N uma secante, qualquer, elevem-se dos centros C e D as perpendiculares C P e D R sobre esta secante; a recta P R será a metade da secante, e desde logo, basta procurar o maximum de P R, ou da parallela D L que lhe é igual. Ora, o triangulo rectangulo D L C dá D L < C D; portanto, C D é o maximum de P R, e este maximum tem lugar quando a secante M A N é parallela á linha dos centros C e D, das duas circunferencias.

Os geometras deram a este processo o nome de *methodo das substituições successivas*, porque consiste, como se vê, em reduzir successivamente a questão proposta a outras mais simples, até se chegar a uma cuja solução seja conhecida.

É o preceito de Descartes, applicado ás questões geometricas.

15.º Problema. *Achar o lugar de um ponto cuja distancia a um certo eixo, medida sobre rectas que convergem num ponto fixo, permanece constante.*

Semelhante lugar é uma curva descoberta na antiguidade por Nicomèdes e conhecida sob o nome de *conchoide*.

Para obtel-o, seja x x' o eixo dado (Fig. 237) e A o ponto fixo. Baixemos deste ponto sobre o eixo a perpendicular A y, que o corta no ponto O.

Si tirarmos por A duas obliquas quaesquer A F e A F', igualmente inclinadas sobre a perpendicular A y, os pontos M e M_1, M' e M'_1, determinados respectivamente pelas intersecções das perpendiculares M P, M_1P_1, M'P' e $M'_1P'_1$ com aquellas obliquas, pertencerão ao lugar procurado por serem essas distancias constantemente iguaes duas a duas, isto é, $MP = M_1P_1$, $M'P' = M'_1P'_1$, etc... Vê-se que semelhante lugar é symetrico em relação á perpendicular A y, porque os pontos M e M_1, bem como M' e M'_1, são equidistantes de A y, e se acham situados sobre as perpendiculares M M_1 e M' e M'_1 a este eixo vertical, chamado por isso *eixo de symetria* da curva.

Demais, é esta illimitada, visto como se póde tirar por A uma infinidade de rectas que encontrem o eixo x x' em pontos cuja distancia ao eixo de symetria póde se tornar tão grande quanto se quizer, emquanto que as distancias dos pontos considerados ao eixo horizontal tendem para zero, sem contudo jamais se tornarem nullas. Assim, pois, *a conchoide se approxima indefinidamente do eixo horizontal, sem nunca encontral-o.*

Por ultimo, observemos que essa curva é composta de dous ramos, visto como em cada região separada pelo eixo fixo x x', existe uma infinidade de pontos a ella pertencentes, que se succedem sem discontinuidade. Si determinarmos, pois, os pontos em que a *conchoide* encontra a seu *eixo* de *symetria*, e por semelhantes pontos tirarmos duas parallelas ao eixo x x', a curva será verticalmente limitada por essas parallelas, e terá a forma geral indicada pela (Fig. 237).

As questões deste genero são, entretanto, mais facilmente resolvidas pela *geometria algebrica*, que reduz o estudo das curvas á apreciação de equações. Para obter estas, veremos que basta estabelecer as relações existentes entre as grandesas lineares, ou angu-

lares, que determinam as posições successivas do ponto que descreve a curva. A maior ou menor simplicidade de taes equações depende, pois, da lei segundo a qual se move o ponto descrevente Semelhante lei é de ordinario deduzida de uma das propriedades da. curva em questão, e mais expontaneamente daquella que define com maior simplicidade o seu modo de geração pelo movimento de um ponto.

A conchoide offerece a este respeito uma grande importancia historica; porque, em virtude de seu modo de geração, teria conduzido os antigos, depois dos trabalhos de Appolonius e de Pappus, ao systema de geometria inventado por Descartes nos tempos modernos, si as condições sociaes tivessem permittido o desenvolvimento do primitivo *calculo das relações*. É o que melhor verificaremos, estudando especialmente, no 2º volume desta obra, as sete curvas que, depois do circulo, gosam maior importancia.

Exercicios Numericos

1.ª Questão. *Dois angulos de um triangulo têm respectivamente* $28^\circ 15' 16''$ *e* $32^\circ 43' 12''$*; qual o valor do terceiro angulo?*

A somma dos angulos de um triangulo valendo dois angulos rectos, segundo a 1ª lei de Phales, é claro que chamando x o angulo incognito, teremos a equação:

$$28^\circ 15' 16'' + 32^\circ 43' 12'' + x = 180^\circ$$

donde

$$x = 180^\circ - (28^\circ 15' 16'' + 32^\circ 43' 12'') = 180^\circ - 60^\circ 58' 28'' = 119^\circ 1' 32''.$$

2.ª Questão. *Um dos angulos externos a um certo triangulo é de* $62^\circ 47' 58''$*, e um dos angulos internos não adjacentes é de* $18^\circ 14' 50''$*; qual o valor dos dois outros angulos?*

Chamando x e y os angulos pedidos tem-se as equações:

$$x + 62^\circ 47' 58'' = 180^\circ$$

e

$$62^\circ 47' 58'' = y + 18^\circ 14' 50''.$$

A primeira nos dá

$$x = 180^\circ - 62^\circ 47' 58'' = 117^\circ 12' 2'',$$

e a segunda

$$y = 62^\circ 47' 58'' - 18^\circ 14' 50'' = 44^\circ 33' 8'';$$

valores dos angulos pedidos.

3.ª Questão. *Uma recta parallela a um dos lados de um triangulo determina sobre o segundo dois segmentos de 18 e 7 metros. Quaes*

são os segmentos determinados por aquella recta sobre o terceiro lado, tendo este 30 metros de comprimento ?

É bastante decompôr 30 em duas partes que estejam entre si como 18 está para 7. Estas duas partes podem ser representadas por 18 x e 7 x. Sua somma dá $25\,x = 30$; donde $x = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$: Portanto, $18\,x = 21^m60$ e $7\,x = 8^m40$.

4.ª Questão. *Dois lados de um triangulo têm respectivamente* 158 *e* 176 *metros ; a partir do vertice commum tome-se* 120 *metros sobre o primeiro lado. Qual o comprimento que se deve tomar sobre o segundo, para que a recta tirada por estes dois pontos seja parallela ao terceiro lado ?*

O segundo lado deve ficar dividido na mesma proporção que o primeiro : Portanto, chamando x o comprimento pedido, tem-se :

$$\frac{x}{176} = \frac{120}{158}, \text{ logo : } x = \frac{120 . 176}{158} = 133^m67.$$

5.ª Questão. *Sobre uma recta indefinida* A N, *dá-se* A M = 15 *e* A B = 23.

Calcular um ponto N *tal que se tenha* $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$ (Fig. 238).

A proporção acima dá, quando se subtrahe os numeradores de seus denominadores

$$\frac{AB}{NB} = \frac{MA - MB}{MB} \text{ ou } \frac{23}{x} = \frac{7}{8}.$$

Dahi se tira $7\,x = 184$ e $x = 26^m29$, app^mte.

6.ª Questão. *Dois lados a e b de um triangulo têm 14 e 21 metros, e a projecção do terceiro lado sobre o segundo é de 11 metros. Calcular o terceiro lado c, e a altura h que cahe sobre o segundo* (Fig. 239).

1.º Tem-se, em virtude de uma propriedade conhecida,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,bn.$$

Ora, $n = b - p = 21 - 11 = 10$.

A equação precedente torna-se, pois,

$$c^2 = 289 + 441 - 420 = 310\text{; donde } c = 17^m75.$$

2º O triangulo rectangulo B C D dá

$$h^2 = a^2 - n^2 = 289 - 100 = 189\text{, donde } h = 13^m75.$$

7.ª *Os tres lados* A, B e C *de um triangulo têm 52, 51 e 25 metros. Calcular as projecções* B' e C' *dos lados* B *e* C *sobre* A. *Calcular, em seguida, a altura* H *que cabe sobre o mesmo lado* A (Fig. 240).

É facil de verificar, em consequencia do que sabemos, que a somma de dois lados de um triangulo multiplicada pela sua differença, iguala a somma das projecções destes lados sobre o terceiro multiplicado pela differença destas mesmas projecções; póde-se, pois, escrever

$$(b + c)(b - c) = (b' + c')(b' - c').$$

Tem-se assim $\quad 76.26 = 52(b' - c')$

Dahi se tira $\quad b' - c' = 38.$

A semi-somma das projecções *b'* e *c'* é 26, e sua semi-differença é 19.

Tem-se $\quad b' = 26 + 19 = 45^m$

e $\quad c = 26 - 19 = 7^m.$

Para achar

h poremos $h^2 = c^2 - c'^2 = 625 - 49 = 575$

donde $\quad h = 24^m.$

8.ª Questão. *A hypotenusa de um triangulo rectangulo tem 30 metros, e um dos segmentos determinados pela altura sobre a hypotenusa tem 20 metros. Calcular esta altura e os dois lados do angulo recto.*

Chamemos *h* a altura, *a* a hypotenusa, *b* e *c* os dois outros lados, e *m* e *n* suas projecções sobre a hypotenusa.

Em virtude das propriedades do triangulo rectangulo, têm-se

1º $h^2 = m\,n = 20.10 = 200$, donde $h = 14^m14$.

2º $b^2 = a\,m = 30.20 = 600$, donde $b = 24^m49$.

3º $c^2 = a\,n = 30.10 = 300$, donde $c = 17^m32$.

9.ª Questão. *A que altura uma escada de 5ᵐ toca um muro, si o seu pé está a 2ᵐ do muro?*

O comprimento da escada, a altura procurada e a distancia do pé ao muro, formam um triangulo rectangulo; tem, pois,

$$x^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 : \text{logo, } x = 4^m58.$$

10.ª Questão. *Qual é o lado de um quadrado, si a diagonal mais esse lado tem 5^m80?*

Num quadrado de 1 metro de lado, sabe-se que a diagonal tem um comprimento expresso pela $\sqrt{2}$; assim, o lado e a diagonal têm juntos para comprimento $1 + \sqrt{2}$.

E como todos os quadrados são figuras semelhantes, suas dimensões homologas estão sempre na mesma relação; tem-se, pois, chamando x o lado desconhecido,

$$\frac{x}{1} = \frac{5 - 80}{1 + \sqrt{2}}.$$

O resultado com tres algarismos decimaes já terá uma approximação sufficiente:

Pondo, portanto,

$\sqrt{2} = 1{,}414$, tem-se $1 + \sqrt{2} = 2{,}414$ para denominador, e 5,80 para numerador; donde $x = 2^m40$.

11.ª Questão. *Qual é o lado de um quadrado, si a differença entre a diagonal e o lado é de 5^m80?*

Num quadrado de 1 metro de lado, a diagonal é $\sqrt{2}$; e a differença é $\sqrt{2} - 1$; ter-se-ha, pois, a proporção

$$\frac{x}{1} = \frac{2{,}50}{\sqrt{2} - 1}$$

donde $x = 14^m003$.

12.ª Questão. *As duas diagonaes de um parallelogrammo têm 25^m e 40^m; e um dos lados 18^m. Qual é o perimetro deste parallelogrammo?*

Sabemos que a somma dos quadrados das diagonaes é igual á somma dos quadrados dos quatro lados; portanto, designando por x o lado desconhecido, tem-se

$$2\,x^2 + 2.18 = 25^2 + 40^2$$

e $$x = 28^m08.$$

13.ª Questão. *Os lados de um quadrilatero têm 20^m, 30^m, 35^m e 8^m, e as suas diagonaes 25^m e 36^m. Calcular a recta que junta o meio das diagonaes.*

Segundo o theorema de Euler, sabemos que a somma dos quadrados dos quatro lados de um quadrilatero é igual á somma dos quadrados das diagonaes, mais quatro vezes o quadrado da recta que une os pontos medios destas diagonaes.

Portanto, chamando x a linha que junta estes dois meios, teremos:

$$4\,x^2 + 25^2 + 36^2 = 20^2 + 30^2 + 35^2 + 8^2$$

donde $$x = 12^m92.$$

14.ª Questão. *As diagonaes de um trapezio rectangulo têm respectivamente 15^m81 e 13^m, um dos lados não parallelos 5^m82, e sua linha mediana 13^m5, sendo de 1^m5 o segmento desta interceptado pelas diagonaes; pede-se o outro lado não parallelo.*

Sabemos (106) que $a^2 + c^2 = d^2 + d'^2 - 2\,bb'$, onde tudo é aqui conhecido, excepto c, b e b'. Para obter estas duas ultimas quantidades, notemos (113) que $\frac{b - b'}{2} = 1^m5$ e $\frac{b + b'}{2} = 13^m5$; portanto, será a baze maior $b = 13^m5 + 1^m5 = 15^m$, e a menor $b' = 13^m5 - 1^m5 = 12^m$. Logo, será $(5{,}82)^2 + c^2 = (15{,}81)^2 + 13^2 - 2.15.12$,

ou $$33{,}87 + c^2 = 249{,}95 + 169 - 360,$$

ou ainda $$33{,}87 + c^2 = 418{,}95 - 360 = 58{,}95,$$

ou $c^2 = 58,95 - 33,85 = 25,08,$

donde $c = \sqrt{25,08} = 5^m$ app^{mte}.

15.ª Questão. *A que distancia do centro se achà uma corda de 2^m72 num circulo de 3^m65 de raio?*

A distancia pedida, e a metade da corda dada, são os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo que tem o ráio para hypotenusa; faresom, portanto, o calculo seguinte:

$(3,65)^2$	13,3225
$(1,36)^2$	1,8496
Differença.	11,4729
Raiz quadrada	3^m387

16.ª Questão. *Calcular a perpendicular baixada de um ponto da circunferencia sobre o diametro; sabendo-se que os segmentos que ella determina sobre este diametro têm respectivamente 7^m e 9^m.*

Seja x esta perpendicular; tem-se $x^2 = 7.9 = 63$; donde $x = 7^m94$ app^{mte}.

17.ª Questão. *Num circulo* C *de 17^m de raio, duas cordas se cortam em I, e o producto dos dous segmentos de cada uma dellas é 145. Calcular a distancia* C I *do centro ao ponto de interseção* (Fig. 241).

Si traçarmos um diametro A B pelo ponto de interseção, os dous segmentos desse diametro são $17 + X$ e $17 - X$, e o seu producto $17^2 - X^2$ é igual tambem a 145.

Temos pois $289 - X^2 = 145;$

Ajuntando X^2 e subtrahindo 145, temos $X^2 = 144$

d'onde $X^2 = 12$

18.ª Questão. *Duas cordas se cortam; os dous segmentos de uma têm 15^m* e *10^m. Calcular os dous segmentos da outra corda, cujo comprimento total é de 28 metros.*

Os dous segmentos desconhecidos podem ser representados por X e $28 - X$; seu producto é $28X - X^2$; e teremos:

$$28X - X^2 = 150$$

ou, mudando todos os signaes, $X^2 - 28X = 150$

Ajuntando uma mesma quantidade aos dois numeros, $14^2 = 196$;

teremos $X^2 - 28X + 14^2 = 46$

ou $(X - 14)^2 = 46$

Extrahindo a raiz, encontra-se $X - 14 = 6{,}78$

e ajuntando 14 aos dous membros $X = 28^m78$

O outro segmento é 7^m22

19.ª Questão. *Duas secantes partem de um mesmo ponto; as duas partes exterior e interior de uma têm 13^m e 23^m, e a parte exterior da segunda 17 metros. Calcular sua parte interior.*

Seja X o comprimento pedido. As secantes inteiras são representadas pelos numeros: $X + 17$ e 36;

e temos $(X + 17)\,17 = 36.13$

ou $17X + 289 = 468$

ou ainda $17X = 179$

d'onde $X = 10^m53.$

20.ª Questão. *O diametro de um circulo tem 32^m50, e o prolongamos de 4^m50. Calcular o comprimento X da tangente tirada do ponto obtido.*

Deve-se ter $X^2 = 32{,}50 \times 4{,}50$

ou $X^2 = 146{,}25$

d'onde $X = 12^m09$

21.ª Questão. *Uma tangente e uma secante partem de um mesmo ponto; a tangente tem 18 metros e a parte interior da secante 23 metros. Calcular a parte exterior X dessa secante.*

Temos a equação $(X + 23)\,X = 18^2$

ou $X^2 + 23X = 324$

Ajuntando aos dous membros $11{,}5^2 = 132{,}25$

teremos $X^2 + 23X + 11{,}5^2 = 456{,}25$

donde, tomando as raizes quadradas, $X + 11{,}5 = 21{,}36$

e, subtrahindo 11,5 aos dous membros, $X = 9^m86$

22.ª Questão. *O diametro de um circulo tem 25ᵐ40. De quanto é preciso prolongal-o para que a tangente tirada do ponto obtido seja de 12 metros?*

O quadrado da tangente será 144; e este mesmo producto deverá ser obtido multiplicando o prolongamento X pela secante inteira X + 25,40.

Temos pois	$X^2 + 25{,}40\,X = 144$
Ajuntando	$12{,}70^2 = 161{,}29$
teremos	$X^2 + 25{,}40\,X + 12{,}70^2 = 305{,}29$
donde, tomando as raizes quadradas,	$X + 12{,}70 = 17{,}47$
e, subtrahindo 12,70	$X = 4^{m}77$

23.ª Questão. *Calcular numericamente a divisão de uma linha de 1 metro em media e extrema razão.*

Sabemos que é preciso que se tenha $\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}$

Dahi se tira $x^2 = 1 - x$; donde $x^2 + x = 1$

Addicionando $(1/2)^2 = 1/4$

Teremos $X^2 + X + (1/2)^2 = 5/4$

donde, extrahindo as raizes quadradas $X + 1/2 = 1/2\sqrt{5}$,

e subtrahindo $1/2$ $X = 1/2\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0^{m},61803$.

O pequeno segmento terá $0^{m},38197$.

24.ª Questão. *Em um circulo de 2ᵐ25 de raio, dá-se uma corda de 3 metros. Calcular a corda que subtende o arco metade, assim como a corda que subtende o arco duplo* (Fig. 242).

1.º Chamemos a a corda dada A B, r o raio do circulo, e a' a corda pedida.

O triangulo rectangulo A D O permitte calcular O D ou s, e por conseguinte C D ou t; em seguida o triangulo rectangulo A D C dara a'.

Raio	2,250	Differença	0,573 ... t.
r^2	5,0624	t^2	0,3283
$(1/2\ a)^2$	2,2500	$(1/2\ a)^2$	2,2500
Differença	2,8124	Somma	2,5783
Raiz quadrada	1,677 ... s.	Raiz quadrada	1,606 ... a'.

2.° Supponhamos que a' seja uma corda dada, e que seja preciso calcular a corda A B ou a que subtende um arco duplo.

O quadrado da corda a' iguala á projecção t dessa corda sobre o diametro, multiplicada pelo diametro inteiro C G. Esta propriedade permittirá calcular t, e depois s. Então, o triangulo rectangulo A D O dará A D, que é a metade da corda pedida.

Para resolver o problema sobre os numeros dados, poremos $r = 2^{m},25$, e $a' = 3$ metros.

Tem-se $a'^2 = 2rt$; donde $\frac{a'^2}{r2} = t$.

a^2	9,00	r^2	5,0624
2 r	4,50	s^2	0,0625
Quociente	2,00 ... t.	Differença	4,9999
r	2,25	Raiz quadrada	2,236
Differença	0,25 ... s.	Duas vezes	4,472 ... a.

25.ª Questão. *Uma arcada, em arco de circulo, tem* $3^{m},5o$ *de abertura, e* $o^{m},7o$ *de flecha. Achar seu raio por uma construcção graphica* (Fig. 243), *e depois pelo calculo.*

1.° *Solução graphica.* Traça-se em uma escala qualquer (aqui 1/2 centimetro por metro), a corda A B de $3^{m},5o$; pelo seu meio tira-se a perpendicular indefinida D F sobre a qual se toma C D $= o^{m},7o$: a perpendicular E F, elevada-ao meio da corda A D determina o centro F.

O raio procurado é representado pelo comprimento F D, que, medido segundo a escala escolhida, dá $2^{m},53$.

2° *Solução numerica.* Chamemos G a segunda extremidade do diametro D F G, tem-se, em virtude da propriedade das cordas que se cortam :

$$\frac{CG}{m} = \frac{m}{t}; \text{ donde } CG = \frac{m^2}{t} = \frac{(1,75)^2}{0,70} = 4^{m},37.$$

O diametro inteiro é, pois, 4,-37 + 0, 70 ou 5^{m}. 00, e o raio é 2^{m}. 53.

26.ª Questão. *Rectificar um arco inferior a 1/4 da circumferencia, por uma construcção graphica.*

Seja A M (Fig. 244), o arco a rectificar; tira-se a tangente indefinida A G e o diametro A B, que se prolonga de um comprimento B I igual aos 3/4 do raio. A recta I M G determina o comprimento A G, que é uma rectificação muito approximada do arco A M.

27.ª Questão. *Achar sobre uma circunferencia dada um arco igual em comprimento a uma recta dada.*

A solução do problema precedente serve tambem para este; pois que si tomamos A G (Fig. 244) igual á recta dada, a linha I G determinará o arco pedido A M.

28.ª Questão. *Dividir approximadamente um arco dado em um numero qualquer de partes iguaes.*

A mesma construcção serve ainda para resolver este problema; porque si a linha A G (Fig. 244) está dividida em partes iguaes, as rectas tiradas do ponto aos diversos pontos de divisão, hão de repartir tambem o arco A M em partes iguaes. Tambem é possivel, por este meio, fazer a divisão de um arco em uma razão dada.

29.ª Questão. *Resolver os problemas 26 e 28 para o caso de um arco maior que 1/4 da circunferencia.*

Uma construcção semelhante permitte ainda resolver estas questões, quando o arco dado é maior que um quadrante. Porque, neste caso, se póde fazer a operação na metade do arco, e duplicar os resultados obtidos. Si o arco fôr maior que a semi circunferencia, operar-se-ha sobre a quarta parte deste arco, e quadruplicar-se-ha os resultados obtidos.

Pode-se, assim, rectificar a circunferencia inteira, e dividil-a em um numero qualquer de partes iguaes. Entretanto, como taes construcções graphicas são sujeitas a erros, examinaremos no paragrapho seguinte a solução numerica dessas questões.

Cabe-me a grata obrigação de declarar a todos a quem fôr util este livro, que a sua impressão é devida unicamente à generosidade do illustre engenheiro e amigo da sciencia Dr. Ernesto Otero.

É de lamentar entretanto que desvios de fundos, enviados a Portugal para o fim d'essa publicação, tivessem impedido ao meu sempre lembrado e caro Esposo a grande satisfação de vêr prompto o trabalho typographico de sua obra.

Ainda pela mesma razão não foi tirada a lume a materia restante do volume, o que espero será feito com o producto da venda da parte que ora se acha nelle presentemente concluida.

A. OLINDA CAVALCANTI.

Paris, 11 dezembro 1921.